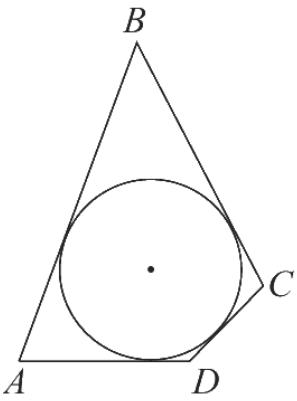
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

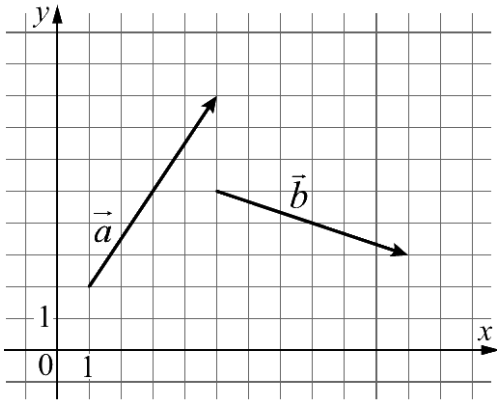
1 В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 22, вписана окружность, $AB = 8$. Найдите длину стороны CD.



Ответ: 3

Решение. В четырёхугольнике, в который вписана окружность, суммы противоположных сторон равны: $AB + CD = BC + AD = \dfrac{22}{2} = 11$. Значит, $CD = 11 - 8 = 3$.

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

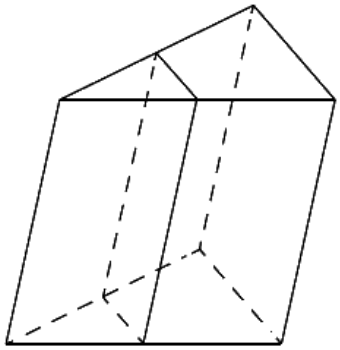


Ответ: 12

Решение. По рисунку вектор $\vec{a}$ идёт из точки $(1;\ 2)$ в точку $(5;\ 8)$, поэтому $\vec{a}\,(4;\ 6)$. Вектор $\vec{b}$ идёт из точки $(5;\ 5)$ в точку $(11;\ 3)$, поэтому $\vec{b}\,(6;\ -2)$. Скалярное произведение $4 \cdot 6 + 6 \cdot (-2) = 12$.

3

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 18. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



Ответ: 36

Решение. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро. Боковые рёбра у призм одинаковые, а перпендикулярное сечение отсечённой призмы — треугольник, отсекаемый средней линией от перпендикулярного сечения исходной, его периметр вдвое меньше. Значит, площадь исходной боковой поверхности $2 \cdot 18 = 36$.

4

В сборнике билетов по химии всего 80 билетов, в 56 из них встречается вопрос по теме «Углеводороды». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос по теме «Углеводороды».

Ответ: 0,3

Решение. Билетов без этой темы $80 - 56 = 24$, вероятность $\dfrac{24}{80} = 0{,}3$.

5

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Ответ: 0,0081

Решение. Выстрелы независимы: $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}0081$.

6

Найдите корень уравнения $4^{x-4} = 64$.

Ответ: 7

Решение. $64 = 4^3$, поэтому $x - 4 = 3$, $x = 7$.

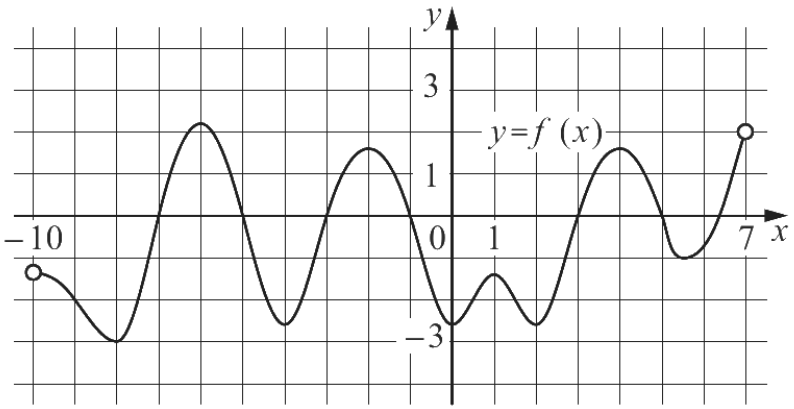
7 Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin 164^\circ}{\sin 82^\circ \cdot \sin 8^\circ}$.

Ответ: 6

Решение. $\sin 164^\circ = \sin 16^\circ = 2\sin 8^\circ \cos 8^\circ$, а $\sin 82^\circ = \cos 8^\circ$. Получаем $\dfrac{3 \cdot 2\sin 8^\circ \cos 8^\circ}{\cos 8^\circ \sin 8^\circ} = 6$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10;\ 7)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2;\ 6]$.

На рисунке изображён график производной; в проекте ФИПИ у подписи графика потерян штрих.



Ответ: 1

Решение. В точке минимума производная меняет знак с «−» на «+», то есть график $f'(x)$ пересекает ось абсцисс снизу вверх. На отрезке $[-2;\ 6]$ это происходит один раз, в точке $x = 3$.

9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 15$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 2$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 36 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: 3

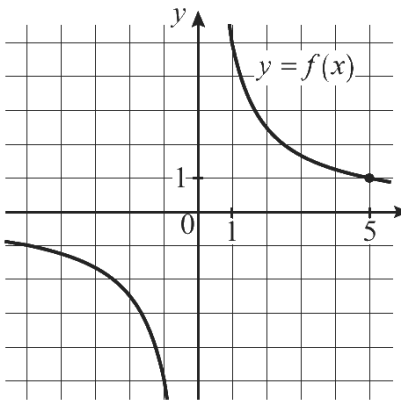
Решение. $15t - t^2 = 36 \iff t^2 - 15t + 36 = 0$, корни $t = 3$ и $t = 12$. Автомобиль останавливается через $\dfrac{v_0}{a} = 7{,}5$ с, формула описывает движение только до остановки, поэтому $t = 3$.

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 90-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 5 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 15

Решение. Пусть скорость второго v км/ч. Тогда $\dfrac{90}{v}-\dfrac{90}{v+5}=3 \iff v^2+5v-150=0$, $v=10$. Первый ехал со скоростью 15 км/ч.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: 0,5

Решение. График проходит через точку $(5;\ 1)$, поэтому $k=5$. Тогда $f(10)=\dfrac{5}{10}=0{,}5$.

12 Найдите точку минимума функции y = (x − 1)^3 − 12(x − 1) + 7.

Ответ: 3

Решение. Производная y′ = 3((x − 1)^2 − 4). Она равна нулю при x = -1 и x = 3. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 3. Ответ: 3.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

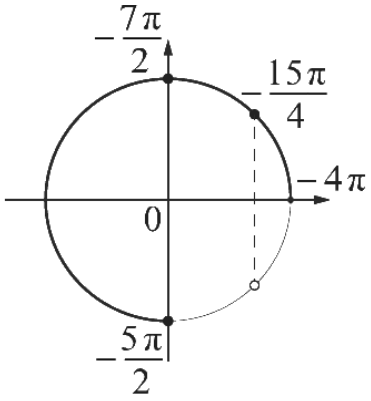
13 а) Решите уравнение $\cos 2x+\sqrt{2}\cos(x+\pi)+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$**; б)** $-\frac{15\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}$

Решение. а) Запишем уравнение в виде $2\cos^2 x-1+\sqrt{2}(-\cos x)+1=0$, то есть $2\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x=0$, $\cos x\cdot\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=0$.

Значит, $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим числа $-\frac{15\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}$.

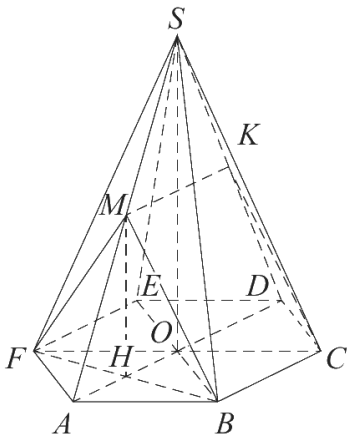
14 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точки M и K — середины боковых рёбер SA и SD соответственно.

а) Докажите, что прямые BC и MK параллельны.

б) Найдите объём пирамиды $MABF$, если $AB=12$, а угол между плоскостью BMC и плоскостью основания пирамиды $SABCDEF$ равен 30°.

Ответ: б) $72\sqrt{3}$

Решение.



а) В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ диагональ AD параллельна стороне BC. Отрезок MK — средняя линия треугольника ASD, параллельная стороне AD. Следовательно, прямые BC и MK параллельны.

б) Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, а H — точка пересечения диагоналей параллелограмма $BAFO$, тогда H — середина диагонали AO, значит, MH — средняя линия треугольника SOA, параллельная стороне SO. Следовательно, отрезок MH — высота пирамиды $MABF$.

Центр O описанной около треугольника BFC окружности лежит на его стороне FC, поэтому $\angle FBC = 90^\circ$. Таким образом, прямая BC перпендикулярна прямым MH и BF, значит, прямая BC перпендикулярна плоскости BMF. Плоскость основания пирамиды пересекается с плоскостью BMC по прямой BC, следовательно, $\angle MBF = 30^\circ$. Значит,

$$MH = BH \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{2} BF \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{2} AB \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6.$$

Площадь треугольника ABF равна $\frac{1}{2} AB \cdot AF \cdot \sin \angle BAF = 36\sqrt{3}$. Следовательно, объём пирамиды $MABF$ равен $\frac{1}{3} MH \cdot S_{ABF} = 72\sqrt{3}$.

15 Решите неравенство $2^{\log_2(\log_2 x)} + \log_4^2 x - 3 \leqslant 0$.

Ответ: $(1;\, 4]$

Решение. Выражение в левой части неравенства определено при $\log_2 x > 0$, то есть при $x > 1$. При выполнении этого ограничения неравенство принимает вид

$$\log_2 x + 0{,}25 \log_2^2 x - 3 \leqslant 0; \quad (\log_2 x + 6) \cdot (\log_2 x - 2) \leqslant 0.$$

Значение выражения $\log_2 x + 6$ положительно при всех допустимых значениях x. Следовательно, $\log_2 x - 2 \leqslant 0$, откуда $x \leqslant 4$. Учитывая ограничение, получаем $1 < x \leqslant 4$.

16 В июле 2030 года планируется взять кредит 182 000 рублей в банке на три года. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Сколько рублей составит общая сумма платежей после полного погашения кредита, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами?

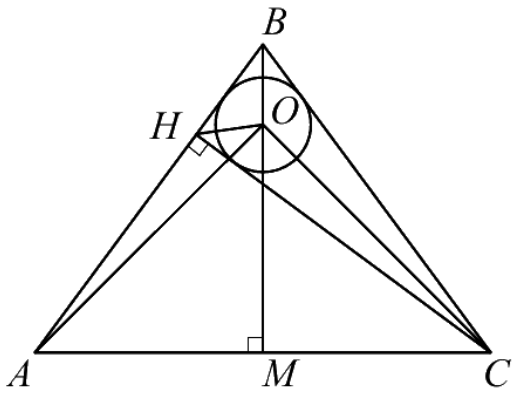
Ответ: 259200

Решение. Пусть платёж X. Долг после трёх лет: $182\,000 \cdot 1{,}2^3 - X(1{,}2^2 + 1{,}2 + 1) = 0$, то есть $314\,496 = 3{,}64X$, $X = 86\,400$. Общая сумма платежей $3X = 259\,200$ рублей.

17 Окружность с центром O касается боковых сторон AB и BC равнобедренного остроугольного треугольника ABC и его высоты CH.
а) Докажите, что $\angle OAC = 45^\circ$.
б) Найдите длину отрезка BC, если $BO = 1$ и $AC = 6$.

Ответ: б) 5

Решение.



а) Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle BCH = 180^\circ - \angle HBC - \angle BHC = 2\alpha - 90^\circ$. Поскольку CO — биссектриса угла BCH, $\angle BCO = \dfrac{\angle BCH}{2} = \alpha - 45^\circ$, значит, $\angle ACO = \angle ACB - \angle BCO = 45^\circ$.
Луч HO — биссектриса прямого угла BHC, значит, $\angle BHO = \angle CHO = 45^\circ$, $\angle AHO = 135^\circ$. Таким образом, сумма углов AHO и ACO четырёхугольника $AHOC$ равна 180°, а значит, около него можно описать окружность. Следовательно, $\angle OAC = \angle OHC = 45^\circ$.
б) Поскольку около четырёхугольника $AHOC$ можно описать окружность, $\angle AOC = \angle AHC = 90^\circ$. Пусть точка M — середина отрезка AC. Тогда отрезок OM является медианой прямоугольного треугольника AOC, проведённой к гипотенузе, значит, $OM = \dfrac{1}{2}AC = 3$.
Отрезок BM — медиана равнобедренного треугольника ABC, а значит, BM является его высотой и биссектрисой, то есть центр O окружности, вписанной в треугольник CBH, лежит на

отрезке BM. Таким образом, $BM = BO + OM = 4$. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{BM^2 + MC^2} = \sqrt{BM^2 + \dfrac{AC^2}{4}} = 5$.

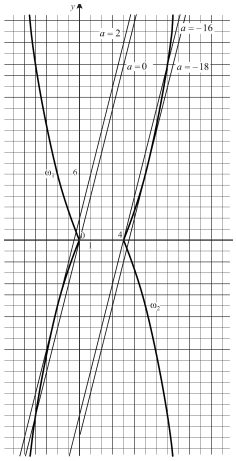
18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x - y + a = 0, \\ 2|y| - x^2 + 4x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a < -18$; $-16 < a < 0$; $a > 2$

Решение. Уравнение $4x - y + a = 0$ задаёт для каждого значения a на плоскости Oxy прямую l, параллельную прямой $y = 4x$ (или совпадающую с ней). Уравнение $2|y| - x^2 + 4x = 0$ задаёт множество точек, представляющее собой объединение частей ω_1 параболы $y = \dfrac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$, соответствующих $y \geqslant 0$ (при $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant 4$), и частей ω_2 параболы $y = -\dfrac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$, соответствующих $y < 0$ (при $x < 0$ и при $x > 4$).



Прямая l и части ω_1. При $a = 0$ прямая проходит через концевую точку $(0;\ 0)$, при $a = -16$ — через концевую точку $(4;\ 0)$. Прямая $y = 4x + a$ касается параболы $2y - x^2 + 4x = 0$, когда уравнение $4x + a = \dfrac{x^2 - 4x}{2}$, то есть $x^2 - 12x - 2a = 0$, имеет единственный корень: $D = 144 + 8a = 0$ при $a = -18$, корень $x = 6$, точка касания $(6;\ 6)$ принадлежит ω_1. При $a < -18$ общих точек у прямой l и ω_1 нет. При $a > -18$ прямая и парабола имеют две общие точки с абсциссами $6 - \sqrt{36 + 2a}$ и $6 + \sqrt{36 + 2a}$; при $-16 < a < 0$ число $6 - \sqrt{36 + 2a}$ принадлежит промежутку $(0;\ 4)$, и эта точка не принадлежит ω_1. Итак, l и ω_1 имеют две общие точки при $a \geqslant 0$, одну при $-16 < a < 0$, две при $-18 < a \leqslant -16$, одну при $a = -18$ и ни одной при $a < -18$.

Прямая l и части ω_2. Уравнение $4x + a = \dfrac{-x^2 + 4x}{2}$, то есть $x^2 + 4x + 2a = 0$, имеет дискриминант $D = 16 - 8a$; при $a = 2$ корень единственный, $x = -2$, точка касания $(-2;\ -6)$ принадлежит ω_2. При $a > 2$ общих точек нет. При $a < 2$ абсциссы общих точек

прямой и параболы $-2-\sqrt{4-2a}$ и $-2+\sqrt{4-2a}$; при $-16 \leqslant a \leqslant 0$ число $-2+\sqrt{4-2a}$ принадлежит отрезку $[0;\ 4]$, и эта точка не принадлежит ω_2. Итак, l и ω_2 имеют две общие точки при $a<-16$, одну при $-16 \leqslant a \leqslant 0$, две при $0<a<2$, одну при $a=2$ и ни одной при $a>2$.

Найдено четыре граничных значения: $a=-18$ (три решения), $a=-16$ (три решения), $a=0$ (три решения), $a=2$ (три решения). Система имеет ровно два решения при $a<-18$, при $-16<a<0$, а также при $a>2$.

19

На столе лежит некоторое количество карточек, часть из которых синего цвета, а остальные красного (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано целое число. На карточках синего цвета написаны различные числа, делящиеся на 5, а на карточках красного цвета написаны различные чётные числа (при этом некоторые числа могут быть написаны дважды: один раз на синей карточке и один раз на красной карточке). Все числа на карточках больше -120.

Оказалось, что наибольшее число, написанное на красной карточке, равно удвоенному количеству синих карточек, а наибольшее число, написанное на синей карточке, равно количеству красных карточек.

а) Может ли на столе лежать ровно шесть карточек?

б) Может ли число красных карточек на столе быть на 90 больше числа синих карточек на столе?

в) Какое наибольшее количество карточек может лежать на столе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 150

Решение. а) Если на синей карточке написано число 5, а на пяти красных карточках написаны числа $-6,\ -4,\ -2,\ 0$ и 2, то условия задачи выполнены.

б) Если на столе s синих карточек и $s+90$ красных карточек, то наибольшее число, написанное на красной карточке, не меньше $2(s+90)-120=2s+60$. Это число не может быть равно удвоенному количеству синих карточек.

в) Пусть на синих карточках написано s чисел, наибольшее из которых равно a, а на красных карточках написано k чисел, наибольшее из которых равно b. Тогда выполнены условия: $a \geqslant 5s-120$, $b \geqslant 2k-120$, $a=k$, $b=2s$, откуда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 5s-120 \leqslant k, \\ 2k-120 \leqslant 2s; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5s-120 \leqslant k, \\ k-60 \leqslant s. \end{cases}$$

Следовательно, $5s-120 \leqslant s+60$, откуда $s \leqslant 45$, а $k \leqslant 105$. Таким образом, на столе может лежать не больше 150 карточек.

Покажем, что на столе может лежать ровно 150 карточек. Если на 45 синих карточках написаны числа $-115,\ -110,\ \ldots,\ 105$, а на 105 красных карточках написаны числа $-118,\ -116,\ \ldots,\ 90$, то условия задачи выполнены.