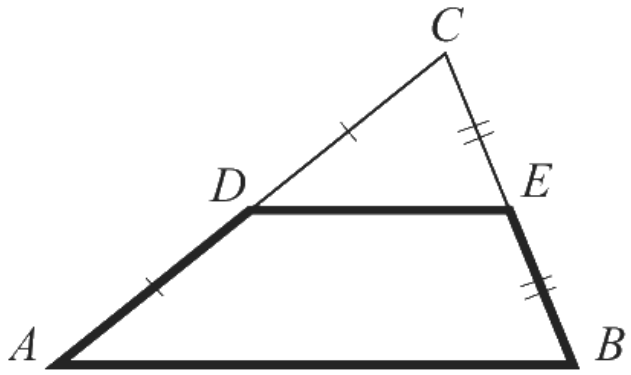
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Площадь треугольника ABC равна 60, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



Ответ: 45

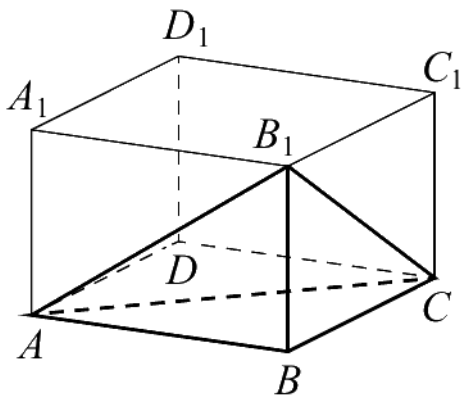
Решение. Треугольник DCE подобен треугольнику ACB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому его площадь в 4 раза меньше: 15. Площадь трапеции $60-15=45$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(2;\ 2)$ и $\vec{b}\,(2;\ -2)$. Найдите длину вектора $7\vec{a}+\vec{b}$.

Ответ: 20

Решение. $7\vec{a}+\vec{b}=(14+2;\ 14-2)=(16;\ 12)$, его длина $\sqrt{256+144}=20$.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 9$, $BC = 6$, $AA_1 = 5$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.



Ответ: 45

Решение. Это треугольная пирамида B_1ABC с основанием ABC и высотой $BB_1 = 5$: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 = 45$.

4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19 включительно.

Ответ: 0,38

Решение. Событие «меньше 20» — объединение несовместных событий «меньше 15» и «от 15 до 19». Значит, искомая вероятность $0{,}94 - 0{,}56 = 0{,}38$.

5 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,2. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: 0,23

Решение. По формуле полной вероятности: $0{,}2 \cdot 0{,}95 + 0{,}8 \cdot 0{,}05 = 0{,}19 + 0{,}04 = 0{,}23$.

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{99 - 7x} = 6$.

Ответ: 9

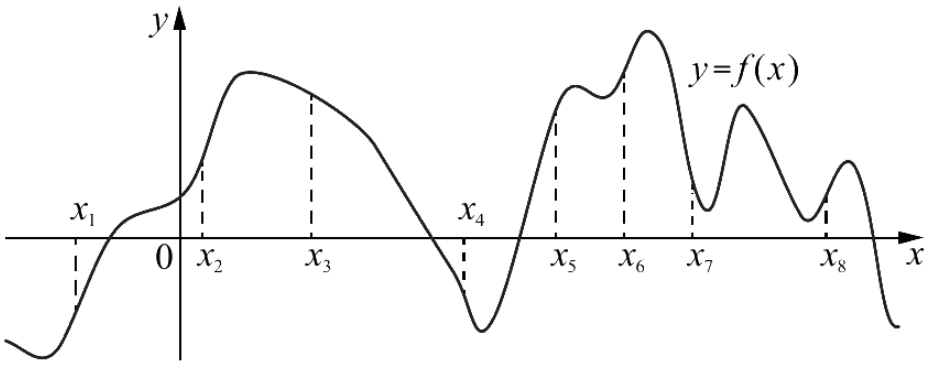
Решение. Возводим в квадрат: $99 - 7x = 36$, $x = 9$. Проверка: $\sqrt{36} = 6$.

7 Найдите значение выражения $\log_{0,6} 50 - \log_{0,6} 18$.

Ответ: -2

Решение. $\log_{0,6} \dfrac{50}{18} = \log_{0,6} \dfrac{25}{9} = \log_{0,6} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2} = -2.$

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



Ответ: 3

Решение. Производная отрицательна там, где функция убывает. По рисунку функция убывает в точках x_3, x_4 и x_7; в остальных отмеченных точках она возрастает.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 8 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 56$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (в киловольтах) за время (в секундах), определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$, где $\alpha = 1{,}5$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 180 секунд. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 7

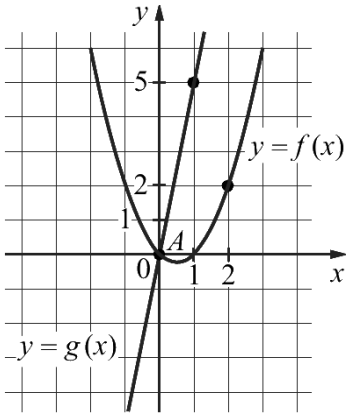
Решение. $\alpha RC = 1{,}5 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 10^{-6} = 60$. Тогда $180 = 60 \log_2 \dfrac{56}{U}$, $\log_2 \dfrac{56}{U} = 3$, $\dfrac{56}{U} = 8$, $U = 7$.

10 Смешав 45%-й и 97%-й растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62%-й раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-го раствора той же кислоты, то получили бы 72%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 45%-го раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 15

Решение. Пусть взяли x кг 45%-го и y кг 97%-го раствора. Тогда $0{,}45x + 0{,}97y = 0{,}62(x + y + 10)$ и $0{,}45x + 0{,}97y + 5 = 0{,}72(x + y + 10)$. Вычитая, получаем $5 = 0{,}1(x + y + 10)$, то есть $x + y = 40$. Из первого уравнения $0{,}45x + 0{,}97(40 - x) = 31$, откуда $x = 15$.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: 6

Решение. Прямая проходит через начало координат и точку $(1;\ 5)$, поэтому $g(x) = 5x$. Парабола проходит через точки $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$ и $(2;\ 2)$, откуда $f(x) = x^2 - x$. Уравнение $x^2 - x = 5x$ имеет корни 0 (точка A) и 6 (точка B).

12 Найдите точку максимума функции $y = (x - 1)^3 - 12(x - 1) + 10$.

Ответ: -1

Решение. Производная $y' = 3((x - 1)^2 - 4)$. Она равна нулю при $x = -1$ и $x = 3$. Знаки производной на трёх промежутках: $+$, $-$, $+$. Поэтому точка максимума $x = -1$, точка минимума $x = 3$. Ответ: -1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

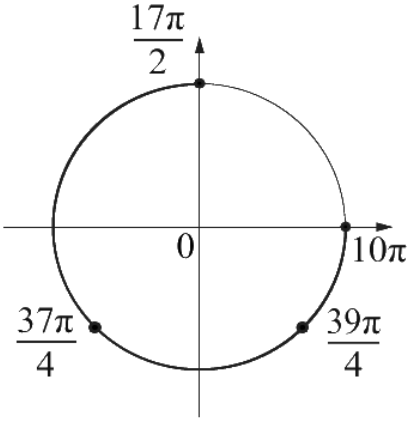
13 а) Решите уравнение $4\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\cos(\pi - x) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{17\pi}{2};\ 10\pi\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $\dfrac{37\pi}{4};\ \dfrac{39\pi}{4}$

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде $4\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\cos x=2$, то есть $2\sqrt{2}\cos x-2\sqrt{2}\sin x-2\sqrt{2}\cos x=2$, $-2\sqrt{2}\sin x=2$.

Значит, $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{17\pi}{2};\ 10\pi\right]$. Получим числа $\dfrac{37\pi}{4};\ \dfrac{39\pi}{4}$.

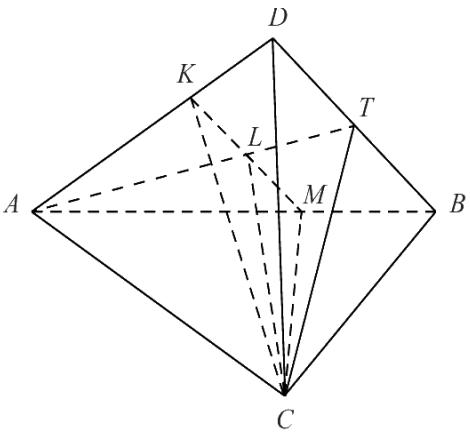
14 В правильном тетраэдре $ABCD$ все рёбра равны 6. На рёбрах AB и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $AM=AK=4$.

а) Докажите, что плоскость CMK делит тетраэдр $ABCD$ на два многогранника, объёмы которых относятся как $5:4$.

б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью CMK.

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Решение.



а) Плоскость CMK делит тетраэдр $ABCD$ на четырёхугольную пирамиду $CBMKD$ с вершиной C и треугольную пирамиду $CMAK$ с той же вершиной. Основания этих пирамид лежат в плоскости ABD, значит, высоты этих пирамид совпадают. Следовательно, объёмы этих

пирамид относятся так же, как площади их оснований: четырёхугольника $BMKD$ и треугольника MAK.

Поскольку $AM:MB=AK:KD=2:1$, прямые MK и BD параллельны, а треугольники MAK и BAD подобны с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$. Значит, площади этих треугольников относятся как $4:9$. Треугольник BAD состоит из треугольника MAK и трапеции $BMKD$. Значит, площадь трапеции $BMKD$ составляет $\frac{5}{9}$ площади треугольника BAD, а площади трапеции $BMKD$ и треугольника MAK относятся как $5:4$, следовательно, объёмы многогранников $CBMKD$ и $CMAK$ относятся как $5:4$.

б) Пусть T — середина отрезка BD, а L — точка пересечения AT и MK. Тогда AT и CT — высоты равносторонних треугольников ABD и CBD соответственно. Значит, плоскость ACT перпендикулярна прямой BD, а значит, и прямой MK, лежащей в плоскости CMK. Следовательно, плоскости ACT и CMK перпендикулярны, поэтому искомый угол равен углу ACL.

В треугольнике ACT: $AT=CT=BC\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}=3\sqrt3$; $AL=\dfrac{AM}{AB}\cdot AT=2\sqrt3$;

$\cos\angle TAC=\dfrac{AC}{2AT}=\dfrac{\sqrt3}{3}$.

В треугольнике ACL: $CL=\sqrt{AC^2+AL^2-2AC\cdot AL\cdot\cos\angle LAC}=2\sqrt6$.

Следовательно,

$$\cos\angle ACL=\frac{AC^2+CL^2-AL^2}{2AC\cdot CL}=\frac{\sqrt6}{3}.$$

15 Решите неравенство

$$\frac{2\cdot8^{x-1}}{2\cdot8^{x-1}-1}\geqslant\frac{3}{8^x-1}+\frac{8}{64^x-5\cdot8^x+4}.$$

Ответ: $(-\infty;\,0);\,\dfrac{1}{3};\,\left(\dfrac{2}{3};\,+\infty\right)$

Решение. Пусть $t=8^x$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{t}{t-4}\geqslant\frac{3}{t-1}+\frac{8}{t^2-5t+4};\quad\frac{t^2-t}{(t-1)(t-4)}-\frac{3t-12}{(t-1)(t-4)}-\frac{8}{(t-1)(t-4)}\geqslant0;$$

$$\frac{t^2-4t+4}{(t-1)(t-4)}\geqslant0;\quad\frac{(t-2)^2}{(t-1)(t-4)}\geqslant0,$$

откуда $t<1;\,t=2;\,t>4$.

При $t<1$ получим: $8^x<1$, откуда $x<0$.

При $t=2$ получим: $8^x=2$, откуда $x=\dfrac{1}{3}$.

16 В июле 2031 года планируется взять кредит 331 000 рублей в банке на три года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей составит общая сумма платежей после полного погашения кредита, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами?

Ответ: 399300

Решение. *На этой позиции в проекте ФИПИ один пример, поэтому задача составлена по его образцу.* Пусть платёж X. Тогда $331\,000 \cdot 1{,}1^3 = X(1{,}1^2 + 1{,}1 + 1)$, то есть $440\,561 = 3{,}31X$, $X = 133\,100$. Общая сумма платежей $3X = 399\,300$ рублей.

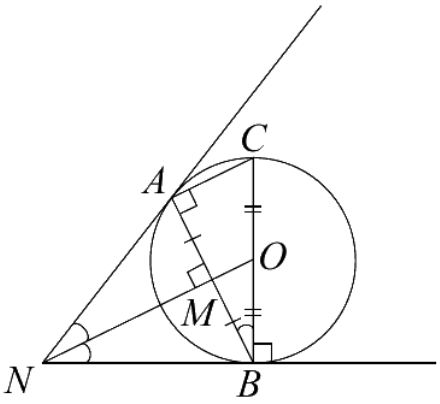
17 Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла ANB.

б) Найдите длину отрезка NO, если известно, что $AC = 10$ и $AB = 24$.

Ответ: б) $\dfrac{169}{5}$

Решение.



а) Треугольник ANB равнобедренный с основанием AB. Следовательно, биссектриса NO угла ANB перпендикулярна прямой AB. Угол BAC опирается на диаметр окружности. Значит, этот угол прямой. Биссектриса угла ANB параллельна прямой AC, поскольку обе эти прямые перпендикулярны прямой AB.

б) Обозначим точку пересечения отрезков AB и NO через M. Тогда M — середина AB, а MO — средняя линия треугольника ABC. Значит, $MB = \dfrac{AB}{2} = 12$, $MO = \dfrac{AC}{2} = 5$. Следовательно, по теореме Пифагора $OB = \sqrt{OM^2 + MB^2} = 13$.

Прямоугольные треугольники MOB и BON подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{OB}{OM}=\dfrac{13}{5}$, откуда получим: $ON=\dfrac{OB}{OM}\cdot OB=\dfrac{169}{5}$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^4-2x^3+\left(a^3-a\right)x^2-\left(2a^2-2\right)x=-ax^3+2x^2-\left(a^3-a\right)x+2a^2-2$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a<-2;\ -2<a<-1;\ a=0;\ a>1$

Решение. Преобразуем уравнение:

$$(x+1)\cdot\left(ax^3-2x^2+\left(a^3-a\right)x-2a^2+2\right)=0;$$

$$(x+1)\cdot\left(ax^3-2x^2+a^3x-2a^2-ax+2\right)=0;$$

$$(x+1)\cdot\left(x^2+a^2-1\right)\cdot(ax-2)=0.$$

Следовательно, уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ax=2,\\x^2=1-a^2.\end{array}\right.$$

При $a=-2$ исходное уравнение имеет единственный корень -1, при $a=-1$ оно имеет три различных корня: -2, -1 и 0, при $a=1$ тоже три различных корня: -1, 0 и 2, поэтому эти значения a не удовлетворяют условию задачи. При $a=0$ исходное уравнение имеет ровно два различных корня: 1 и -1, что соответствует условию задачи. Если $-1<a<1$ и $a\ /\ 0$, ~~то~~ уравнение $x^2=1-a^2$ имеет два различных корня $\sqrt{1-a^2}$ и $-\sqrt{1-a^2}$, отличных от -1, поэтому условия задачи не выполнены. Наконец, если $a<-2$, $-2<a<-1$ или $a>1$, то исходное уравнение имеет ровно два различных корня: -1 и $\dfrac{2}{a}$.

19

Есть 16 монет по 2 рубля и 29 монет по 5 рублей.

а) Можно ли этими монетами набрать сумму 175 рублей?

б) Можно ли этими монетами набрать сумму 176 рублей?

в) Какое наименьшее количество монет, каждая по 1 рублю, нужно добавить, чтобы иметь возможность набрать любую целую сумму от 1 рубля до 180 рублей включительно?

Ответ: а) да; б) нет; в) 3

Решение. а) Если взять 29 монет по 5 рублей и 15 монет по 2 рубля, то получится набрать сумму 175 рублей.

б) Чтобы набрать сумму 176 рублей, нужно чётное количество монет достоинством 5 рублей. Значит, этих монет не больше 28, а сумма их номиналов не превосходит 140 рублей. Таким образом, при помощи монет достоинством 2 рубля нужно набрать не меньше 36 рублей, что невозможно, поскольку при помощи монет по 2 рубля можно набрать не больше 32 рублей.

в) Заметим, что любая сумма, которую можно набрать при помощи имеющихся монет, не превосходит 177 рублей. Следовательно, чтобы набрать 180 рублей, нужно добавить ещё не меньше трёх монет достоинством 1 рубль.

Покажем, что если к имеющимся монетам добавить три монеты по 1 рублю, то можно набрать любую сумму до 180 рублей включительно. Для любой требуемой суммы S возьмём наибольшее количество монет по 5 рублей так, чтобы сумма их номиналов не превосходила S. Тогда останется взять ещё некоторое количество монет на сумму S_1, не превосходящую 35 рублей. Теперь возьмём наибольшее количество монет по 2 рубля так, чтобы сумма их номиналов не превосходила S_1. Тогда останется взять ещё некоторое количество монет на сумму от 0 до 3 рублей. Это можно сделать при помощи монет достоинством 1 рубль.