Часть 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ответ	144	25	160	0,5	0,04	19,21	13	-102	4	18	10	-31	710 000

1. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{17-7}{2}=5$, высота $h=\sqrt{13^2-5^2}=12$, $S=\dfrac{17+7}{2}\cdot 12=144$.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=5\cdot 4+(-1)\cdot(-5)=25$.

3. Основание отсечённой призмы — треугольник, подобный основанию исходной с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$, его площадь в 4 раза меньше. Высоты призм равны, поэтому объём исходной призмы в 4 раза больше: $4\cdot 40=160$.

4. Всего спортсменов $3+7+10=20$, $P=\dfrac{10}{20}=0{,}5$.

5. События независимы: $P=0{,}2^2=0{,}04$.

6. $M=\dfrac{8\cdot 21+13\cdot 13+24\cdot 66}{100}=\dfrac{1921}{100}=19{,}21$.

7. По определению логарифма $15-x=2^1=2$, откуда $x=13$. Аргумент логарифма положителен.

8. По формуле разности квадратов: $(\sqrt{384})^2-(\sqrt{486})^2=384-486=-102$.

9. Производная отрицательна в тех точках, где функция убывает. По графику таких точек 4.

10. $160\cdot 2^{-t/6}=20 \iff 2^{-t/6}=2^{-3} \iff t=18$.

11. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{60}{x}-\dfrac{60}{x+5}=2$, положительный корень $x=10$.

12. Вершина параболы — точка $(2;\,1)$, поэтому $f(x)=a(x-2)^2+1$. По точке $(3;\,1/2)$: $a=-0{,}5$. $f(10)=-0{,}5\cdot(10-2)^2+1=-31$.

13. Пусть S руб. — сумма кредита. Долг ежегодно уменьшается на $\dfrac{S}{5}$, проценты за все годы: $0{,}25S\left(1+\dfrac{4}{5}+\ldots+\dfrac{1}{5}\right)=0{,}25S\cdot\dfrac{6}{2}=0{,}75S$, общая сумма выплат $1{,}75S=1\,242\,500$, откуда $S=710\,000$.

Часть 2

14 а) Решите уравнение $\cos 2x - 7\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$, а $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 7\sin x = 4 \iff 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 3$. Уравнение $\sin x = 3$ корней не имеет, так как $|3| > 1$.

Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-3\pi \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant -\frac{3\pi}{2} \iff -\frac{19}{12} \leqslant k \leqslant -\frac{5}{6}$, $k \in \{-1\}$: $x = -\frac{11\pi}{6}$.

$-3\pi \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant -\frac{3\pi}{2} \iff -\frac{23}{12} \leqslant n \leqslant -\frac{7}{6}$: целых решений нет.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах
1	Обоснованно получен верный ответ в пункте а) ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки при верной последовательности всех шагов решения обоих пунктов
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

---

15 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 10 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 3 : 2$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью BDM.

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Точка M лежит на ребре CC_1, поэтому плоскость BDM пересекает грани куба по

отрезкам BD, BM и DM, и сечение — треугольник BDM. Пусть O — центр квадрата $ABCD$; прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, и OM — высота треугольника BDM. $OC = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$, $CM = 6$, $OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{50 + 36} = \sqrt{86}$, $BD = 10\sqrt{2}$. $S_{BDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{86} = 10\sqrt{43}$.

Ответ: б) $10\sqrt{43}$.

Баллы	Содержание критерия
3	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)
2	Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
1	Имеется верное доказательство пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

---

16 Решите неравенство

$$\frac{4^x - 6 \cdot 2^{x+1} + 32}{\log_3(x)} \geqslant 0.$$

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$ и $\log_3(x) \neq 0$, то есть $x > 0$, $x \neq 1$.
$6 \cdot 2^{x+1} = 12 \cdot 2^x$, числитель раскладывается на множители: $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = (2^x - 4)(2^x - 8)$.
Функции $y = 2^t$ и $y = \log_3 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $2^x - 4$ совпадает со знаком $x - 2$, знак $2^x - 8$ — со знаком $x - 3$, знак $\log_3(x) = \log_3(x) - \log_3 1$ — со знаком $x - 1$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-1} \geqslant 0, \quad x > 0.$$

Метод интервалов: на $(0;\,1)$ дробь отрицательна; на $(1;\,2)$ дробь положительна; на $(2;\,3)$ дробь отрицательна; на $(3;\,+\infty)$ дробь положительна; в точках $x = 2$, $x = 3$ числитель равен нулю.
Ответ: $(1;\,2] \cup [3;\,+\infty)$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только включением или невключением одной или обеих точек $x=2$, $x=3$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки при верной последовательности всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

17 Из квадратного листа жести со стороной 48 см делают коробку без крышки: по углам листа вырезают одинаковые квадраты и загибают края вверх. Какой должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы объём коробки был наибольшим? Ответ дайте в сантиметрах.

Решение. Пусть сторона вырезаемого квадрата равна x см, $0<x<24$. Объём коробки $V(x)=x(48-2x)^2$.
$V'(x)=(48-2x)^2-4x(48-2x)=(48-2x)(48-6x)$. На промежутке $(0;\,24)$ производная обращается в нуль при $x=8$, на $(0;\,8)$ она положительна, на $(8;\,24)$ отрицательна, поэтому $x=8$ — точка максимума, и в ней достигается наибольшее значение.
$V(8)=8\cdot 32^2=8192$.
Ответ: 8 см.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

18 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB=2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AD=\dfrac{17}{2}$, $AK=15$.

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD=\angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB=\angle KAD$. Значит, $\angle AKD=\angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK=AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK=BC=AD$. Тогда $AB=CD=DK+KC=2AD$.
б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB+\angle KBA=90^\circ$ и $\angle AKB=90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD}=2S_{ABK}=AK\cdot BK$. По пункту а) $AB=2AD=17$. Из прямоугольного треугольника ABK: $BK=\sqrt{AB^2-AK^2}=\sqrt{17^2-15^2}=8$. $S_{ABCD}=15\cdot 8=$

120.

Ответ: б) 120.

Баллы	Содержание критерия
3	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)
2	Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
1	Имеется верное доказательство пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

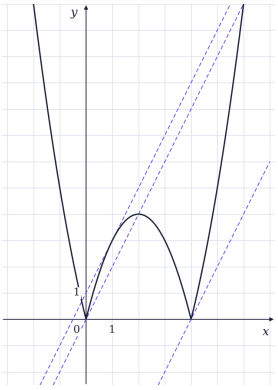
---

19 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-4x\right|=2x+a$$

имеет ровно 4 различных корня.

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y=\left|x^2-4x\right|$ и прямой $y=2x+a$ (угловой коэффициент 2). Поскольку $x^2-4x=x(x-4)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y=x^2-4x$ при $x\leqslant 0$, ветви той же параболы при $x\geqslant 4$ и дуги $y=-(x^2-4x)$ при $0<x<4$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(0;\,0)$ при $a=0$ и через точку $(4;\,0)$ при $a=-8$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2-4x)=2x+a$, то есть $x^2-2x+a=0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a=1$; точка касания $x=1$ лежит в интервале $(0;\,4)$.

Прямая с угловым коэффициентом 2 касается параболы $y=x^2-4x$ в точке $x=3$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a<-8$	-8	$(-8;\,0)$	0	$(0;\,1)$	1	$a>1$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 4 корня получается при $a\in(0;\,1)$.

Ответ: $a\in(0;\,1)$.

Баллы	Содержание критерия
4	Обоснованно получен верный ответ
3	С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением или исключением граничных точек $a=-8$, $a=0$, $a=1$
2	С помощью верного рассуждения получена часть искомого множества: $(0;\,1)$, возможно, с неверно учтёнными граничными точками ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки при верно выполненных шагах решения
1	Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и частей параболы (аналитически или графически)
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

---

20 На доске написано несколько (не менее трёх) различных натуральных чисел. Их среднее арифметическое равно 50. Если стереть с доски наибольшее из этих чисел, то среднее арифметическое оставшихся чисел окажется равным 46. Если же в исходном наборе стереть наименьшее из написанных чисел, то среднее арифметическое оставшихся чисел окажется равным 51.

а) Может ли наименьшее из написанных чисел быть равным 18?

б) Может ли наибольшее из написанных чисел быть равным 123?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

Решение. Пусть на доске $n\geqslant 3$ чисел, их сумма $50n$, наибольшее число M, наименьшее m. Из условия

$$\frac{50n-M}{n-1}=46\Rightarrow M=4n+46,\qquad \frac{50n-m}{n-1}=51\Rightarrow m=51-n.$$

Сумма остальных $n-2$ чисел равна $50n-M-m=47n-97$.

а) Если $m=18$, то $n=33$, $M=178$. Пример: $18,19,\ldots,45,62,175,176,\ldots,178$ (33 числа). Сумма равна $1650=33\cdot 50$; без числа 178 среднее $\dfrac{1472}{32}=46$; без числа 18 среднее $\dfrac{1632}{32}=51$. Ответ: да.

б) Если $M=123$, то $4n+46=123$, $4n=77$, что невозможно при натуральном n, так как 77 не делится на 4. Ответ: нет.

в) Остальные $n-2$ чисел различны и больше $m=51-n$, поэтому их сумма не меньше суммы $n-2$ последовательных чисел, начиная с $m+1$, то есть $(n-2)m+\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$. Подставим $m=51-n$ и умножим на 2:

$$2\,(47n-97)\geqslant 2(n-2)m+(n-2)(n-1)\iff n^2-9n+8\geqslant 0\iff (n-1)$$

При $n\geqslant 3$ отсюда следует $n\geqslant 8$. Пример для $n=8$: числа $43,44,\ldots,49,78$. Сумма $400=8\cdot 50$; без 78 среднее $\dfrac{322}{7}=46$; без 43 среднее $\dfrac{357}{7}=51$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 8.

Для проверяющего: в пункте в) обоснование состоит из двух частей — оценки $n \geqslant 8$ и примера для $n = 8$; пример без оценки или оценка без примера пункт в) не закрывают.

Баллы	**Содержание критерия**
4	Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в)
3	Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б)
2	Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)
1	Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б)
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше