Часть 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ответ	18	25	110	0,48	0,038	1,4	11	90	3	0,2	10	-6	3 447 500

1. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{12 \cdot 27} = 18$.

2. $4\vec{a} - \vec{b} = (7;\ -24)$, $|4\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{49 + 576} = 25$.

3. Основание призмы — треугольник ABD площадью $\dfrac{10 \cdot 11}{2}$, высота $AA_1 = 2$. $V = \dfrac{10 \cdot 11}{2} \cdot 2 = 110$.

4. Всего спортсменов $6 + 7 + 12 = 25$, $P = \dfrac{12}{25} = 0{,}48$.

5. По формуле полной вероятности: $P = 0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}038$.

6. $M(X) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}3 = 1{,}4$.

7. Возведём обе части в квадрат: $53 - 4x = 9$, $4x = 44$, $x = 11$.

8. По формуле разности квадратов: $(\sqrt{384})^2 - (\sqrt{294})^2 = 384 - 294 = 90$.

9. Точки экстремума — нули производной, в которых она меняет знак: $-3;\ -1;\ 4$. В точке 1 график f' касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 3.

10. $h(t) \geqslant 4 \iff 5t^2 - 9t + 4 \leqslant 0 \iff 0{,}8 \leqslant t \leqslant 1$. Мяч находится не ниже 4 м в течение $1 - 0{,}8 = 0{,}2$ с.

11. Пусть x кг — масса 45-процентного раствора, y кг — 50-процентного. Тогда $0{,}45x + 0{,}5y = 0{,}39(x + y + 10)$ и $0{,}45x + 0{,}5y + 9 = 0{,}57(x + y + 10)$. Вычитая, получим $x + y + 10 = 50$, откуда $x = 10$, $y = 30$.

12. График проходит через точку $(9;\ -3)$: $-3 = k\sqrt{9}$, $k = -1$. $f(36) = -1 \cdot \sqrt{36} = -6$.

13. Пусть $S = 1\,970\,000$ руб. Долг ежегодно уменьшается на $\dfrac{S}{5}$. Проценты за все годы: $0{,}25S\left(1 + \dfrac{4}{5} + \ldots + \dfrac{1}{5}\right) = 0{,}25S \cdot \dfrac{6}{2} = 1\,477\,500$. Общая сумма выплат: $1\,970\,000 + 1\,477\,500 = 3\,447\,500$.

Часть 2

14 а) Решите уравнение $2\cos 2x - 8\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$, а $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$2\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 8\sin x = 5 \iff 4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1{,}5$. Уравнение $\sin x = 1{,}5$ корней не имеет, так как $|1{,}5| > 1$.

Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\frac{5\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant 4\pi \iff \frac{7}{6} \leqslant k \leqslant \frac{23}{12}$: целых решений нет.

$\frac{5\pi}{2} \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant 4\pi \iff \frac{5}{6} \leqslant n \leqslant \frac{19}{12}$, $n \in \{1\}$: $x = \frac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах
1	Обоснованно получен верный ответ в пункте а) ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки при верной последовательности всех шагов решения обоих пунктов
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

---

15 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 12, боковое ребро равно 10. Точка M — середина ребра SC.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BDM.

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) Плоскость BDM пересекает пирамиду по треугольнику BDM. Отрезок OM — средняя

линия треугольника SAC: $OM = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{10}{2}$. Прямая OM лежит в плоскости SAC, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, то есть OM — высота треугольника BDM. $BD = 12\sqrt{2}$, $S_{BDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot \dfrac{10}{2} = 30\sqrt{2}$.

Ответ: б) $30\sqrt{2}$.

Баллы	Содержание критерия
3	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)
2	Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
1	Имеется верное доказательство пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

---

16 Решите неравенство

$$\log_2^2 x - 4 \leqslant 0.$$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_2 x$: $t^2 - 4 \leqslant 0 \iff (t+2)(t-2) \leqslant 0 \iff -2 \leqslant t \leqslant 2$.

Функция $y = \log_2 x$ возрастает, поэтому $-2 \leqslant \log_2 x \leqslant 2 \iff 0{,}25 \leqslant x \leqslant 4$.

Ответ: $[0{,}25;\ 4]$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только включением или невключением одной или обеих точек $x = 0{,}25$, $x = 4$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки при верной последовательности всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

---

17 Генератор с ЭДС $\varepsilon = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 6$ Ом подключён к нагрузке сопротивлением R Ом. Мощность, выделяемая на нагрузке, вычисляется по формуле

$$P(R) = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}.$$

Найдите наибольшую мощность, которая может выделяться на нагрузке. Ответ дайте в ваттах.

Решение. $P(R)=\dfrac{144R}{(R+6)^2}$, $R>0$. $P'(R)=144\cdot\dfrac{(R+6)^2-2R(R+6)}{(R+6)^4}=144\cdot\dfrac{6-R}{(R+6)^3}$.

На $(0;\,6)$ производная положительна, на $(6;\,+\infty)$ отрицательна, поэтому наибольшее значение достигается при $R=6$: $P(6)=\dfrac{144\cdot 6}{144}=6$.

Ответ: 6 Вт.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

---

18 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ACH и BCH соответственно.

а) Докажите, что $O_1O_2=r\sqrt{2}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Найдите O_1O_2, если $AC=7$, $BC=24$.

Решение. а) Треугольники ACH и ABC подобны (прямоугольные, с общим острым углом A), коэффициент подобия $\dfrac{AC}{AB}$; треугольники BCH и ABC подобны с коэффициентом $\dfrac{BC}{AB}$. Поэтому радиусы вписанных окружностей равны $r_1=r\cdot\dfrac{AC}{AB}$ и $r_2=r\cdot\dfrac{BC}{AB}$.

Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла, поэтому HO_1 и HO_2 — биссектрисы прямых углов AHC и BHC: $\angle O_1HC=\angle O_2HC=45^\circ$, $\angle O_1HO_2=90^\circ$. Расстояние от O_1 до сторон угла AHC равно r_1, поэтому $HO_1=r_1\sqrt{2}$; аналогично $HO_2=r_2\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора $O_1O_2^2=2r_1^2+2r_2^2=2r^2\cdot\dfrac{AC^2+BC^2}{AB^2}=2r^2$, то есть $O_1O_2=r\sqrt{2}$.

б) $AB=\sqrt{7^2+24^2}=25$. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r=\dfrac{AC+BC-AB}{2}=\dfrac{7+24-25}{2}=3$. По пункту а) $O_1O_2=3\sqrt{2}$.

Ответ: б) $3\sqrt{2}$.

Баллы	Содержание критерия
3	Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)
2	Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
1	Имеется верное доказательство пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

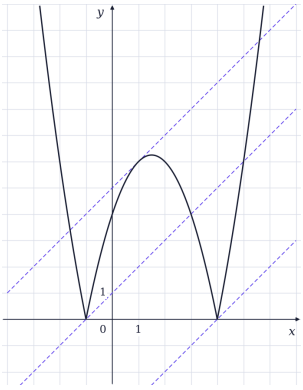
---

19 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-3x-4\right|=x+a$$

имеет ровно 4 различных корня.

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y=\left|x^2-3x-4\right|$ и прямой $y=x+a$ (угловой коэффициент 1). Поскольку $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y=x^2-3x-4$ при $x\leqslant -1$, ветви той же параболы при $x\geqslant 4$ и дуги $y=-(x^2-3x-4)$ при $-1<x<4$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(-1;\,0)$ при $a=1$ и через точку $(4;\,0)$ при $a=-4$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2-3x-4)=x+a$, то есть $x^2-2x-4+a=0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a=5$; точка касания $x=1$ лежит в интервале $(-1;\,4)$.

Прямая с угловым коэффициентом 1 касается параболы $y=x^2-3x-4$ в точке $x=2$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a<-4$	-4	$(-4;\,1)$	1	$(1;\,5)$	5	$a>5$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 4 корня получается при $a\in(1;\,5)$.

Ответ: $a\in(1;\,5)$.

Баллы	Содержание критерия
4	Обоснованно получен верный ответ
3	С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением или исключением граничных точек $a=-4$, $a=1$, $a=5$
2	С помощью верного рассуждения получена часть искомого множества: $(1;\,5)$, возможно, с неверно учтёнными граничными точками ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки при верно выполненных шагах решения
1	Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и частей параболы (аналитически или графически)
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

---

20 На доске написано несколько (не менее трёх) различных натуральных чисел. Их среднее арифметическое равно 29. Если стереть с доски наибольшее из этих чисел, то среднее арифметическое оставшихся чисел окажется равным 25. Если же в исходном наборе стереть наименьшее из написанных чисел, то среднее арифметическое оставшихся чисел окажется равным 30.

а) Может ли наименьшее из написанных чисел быть равным 12?

б) Может ли наибольшее из написанных чисел быть равным 79?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

Решение. Пусть на доске $n\geqslant 3$ чисел, их сумма $29n$, наибольшее число M, наименьшее m. Из условия

$$\frac{29n-M}{n-1}=25\Rightarrow M=4n+25,\qquad \frac{29n-m}{n-1}=30\Rightarrow m=30-n.$$

Сумма остальных $n-2$ чисел равна $29n-M-m=26n-55$.

а) Если $m=12$, то $n=18$, $M=97$. Пример: $12,13,\ldots,26,44,96,97$ (18 чисел). Сумма равна $522=18\cdot 29$; без числа 97 среднее $\frac{425}{17}=25$; без числа 12 среднее $\frac{510}{17}=30$. Ответ: да.

б) Если $M=79$, то $4n+25=79$, $4n=54$, что невозможно при натуральном n, так как 54 не делится на 4. Ответ: нет.

в) Остальные $n-2$ чисел различны и больше $m=30-n$, поэтому их сумма не меньше суммы $n-2$ последовательных чисел, начиная с $m+1$, то есть $(n-2)m+\frac{(n-2)(n-1)}{2}$. Подставим $m=30-n$ и умножим на 2:

$$2\,(26n-55)\geqslant 2(n-2)m+(n-2)(n-1)\iff n^2-9n+8\geqslant 0\iff (n-1)$$

При $n\geqslant 3$ отсюда следует $n\geqslant 8$. Пример для $n=8$: числа $22,23,\ldots,28,57$. Сумма $232=8\cdot 29$; без 57 среднее $\frac{175}{7}=25$; без 22 среднее $\frac{210}{7}=30$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 8.

Для проверяющего: в пункте в) обоснование состоит из двух частей — оценки $n \geqslant 8$ и примера для $n = 8$; пример без оценки или оценка без примера пункт в) не закрывают.

Баллы	**Содержание критерия**
4	Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в)
3	Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б)
2	Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)
1	Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б)
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше