От условия к подсчёту исходов

Памятка • Повторение условной вероятности

24 новых задания. Рекомендуется два подхода по 60–75 минут: № 1–12 и № 13–24. Решения записывайте в тетради. Задания № 23–24 — дополнительный вызов.

Имя: _____ Дата: _____

1. Известное условие меняет множество исходов

P(A | B) — вероятность события A при условии, что B уже произошло. В знаменателе должны остаться только исходы, удовлетворяющие условию B.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Пример. Бросили два кубика. Известно, что сумма равна 7. Найти вероятность того, что на первом кубике больше 4 очков.

Остаются 6 пар: (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1). Подходят последние две. Пары (1; 6) и (6; 1) — разные исходы.

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2. Дерево: вдоль ветки умножаем, ветки складываем

Первый станок делает 60% деталей, второй — 40%. Доля брака равна 2% и 5% соответственно. Брак может прийти с любого станка:

$$P(D) = 0{,}6 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}032$$

Если деталь уже оказалась бракованной, вероятность второго станка:

$$P(H_2 \mid D) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}05}{0{,}032} = 0{,}625$$

3. Без возвращения состав меняется

В коробке 5 красных и 3 синих шара. Вероятность двух красных подряд: после первого красного остаются 4 красных из 7 шаров.

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

Выбираем несколько предметов

Памятка • Сочетания и подробный разбор образца

Сочетания считают выбор k предметов из n, когда порядок не важен. Все предметы считаем различимыми, даже если они одного цвета.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

n! = 1 · 2 · … · n; 0! = 1. Также $C^0_n = C^n_n = 1$. Выбрать «А и Б» и «Б и А» — один и тот же набор. Поэтому при подсчёте пар делим на 2.

Образец: не более трёх красных

В коробке 7 красных и 3 синих шара. Наугад без возвращения выбирают 5 шаров. Какова вероятность того, что красных не более 3?

Шаг 1. Всего равновероятных наборов: $C^5_{10} = 252$.
Шаг 2. «Не более 3» означает 0, 1, 2 или 3 красных. Но синих всего 3, поэтому 0 и 1 красный невозможны. Остаются два случая.

$$2R + 3B:\ C_7^2 C_3^3 = 21; \qquad 3R + 2B:\ C_7^3 C_3^2 = 105$$

Шаг 3. Выбор красных и синих внутри случая перемножаем; несовместные случаи складываем.

$$P = \frac{C_7^2 C_3^3 + C_7^3 C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{21 + 105}{252} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Проверка через противоположное событие. Больше 3 красных — это 4 или 5 красных:

$$P = 1 - \frac{C_7^4 C_3^1 + C_7^5 C_3^0}{C_{10}^5} = 1 - \frac{105 + 21}{252} = 0{,}5$$

Как не ошибиться

- «Не менее 2» означает 2 и больше; «не более 2» — 0, 1 или 2.
- «Хотя бы один» часто проще считать как 1 минус «ни одного».
- Последовательности цветов не равновероятны сами по себе.
- Не смешивайте упорядоченные исходы и неупорядоченные наборы.
- При дополнительном условии пересчитайте знаменатель.

Ответы: сохраняйте точную обыкновенную дробь, если десятичная бесконечна. Округляйте только там, где это явно требуется.

Повторение прошлой темы

№ 1–6 • Условие, дерево, полная вероятность

Во всех задачах выбор равновероятный; шары и карточки не возвращают обратно.

1. Бросают два обычных игральных кубика. Известно, что сумма очков равна 9. Найдите вероятность того, что на первом кубике выпало больше 4 очков.

2. Симметричную монету бросают четыре раза независимо. Известно, что орёл выпал хотя бы один раз. Найдите вероятность того, что он выпал ровно два раза.

3. В коробке 5 красных и 4 синих шара. Последовательно извлекают два шара без возвращения. Найдите: а) вероятность красного второго шара, если первый красный; б) вероятность двух красных шаров.

4. Магазин получает 60% ламп с завода А и 40% с завода Б. Доля бракованных ламп — 3% и 8% соответственно. Найдите вероятность того, что случайная лампа бракованная.

5. В условиях задачи 4 выбранная лампа оказалась бракованной. Найдите вероятность того, что она изготовлена на заводе Б.

6. В первой урне 4 белых и 2 чёрных шара, во второй — 2 белых и 3 чёрных. Из первой во вторую перекладывают случайный шар, затем из второй извлекают случайный шар. Найдите вероятность того, что извлечённый шар белый.

Комбинаторика без спешки

№ 7–12 • Сначала научимся считать наборы

Во всех задачах выбор равновероятный; шары и карточки не возвращают обратно.

7. Вычислите число сочетаний: а) C^2_5; б) C^3_6; в) C^2_8; г) C^0_7. Объясните словами смысл первого и последнего результатов.

8. Из 8 учеников выбирают двух дежурных с одинаковыми обязанностями. Сколькими способами можно это сделать? Почему пары «Ира, Олег» и «Олег, Ира» не нужно считать дважды?

9. В коробке 6 красных и 4 синих шара. Выбирают набор из 3 шаров. Сколько существует наборов: а) всего; б) ровно с двумя красными; в) только из синих шаров?

10. В коробке 7 красных и 3 синих шара. Выбирают 5 шаров. Перечислите все возможные количества красных шаров. Для каждого укажите число синих. Какие случаи подходят под «не более 3 красных»?

11. В группе 5 юношей и 4 девушки. Выбирают команду из 4 человек. Сколькими способами можно выбрать команду, в которой ровно 2 девушки?

12. На 9 карточках написаны числа от 1 до 9, по одному на каждой. Выбирают 3 карточки. Сколько наборов содержат: а) только нечётные числа; б) хотя бы одно чётное число?

Вероятность через сочетания

№ 13–18 • От одного случая к сумме случаев

Во всех задачах выбор равновероятный; шары и карточки не возвращают обратно.

13. В коробке 6 красных и 4 синих шара. Наугад выбирают 3 шара. Найдите вероятность того, что ровно 2 из них красные.

14. В коробке 5 красных и 3 синих шара. Наугад выбирают 4 шара. Найдите вероятность того, что среди них не более 2 красных.

15. В коробке 8 красных и 4 синих шара. Наугад выбирают 5 шаров. Найдите вероятность того, что среди них не менее 3 красных.

16. Из 10 билетов 3 выигрышных. Покупатель наугад выбирает 4 билета. Найдите вероятность хотя бы одного выигрыша.

17. В группе 5 юношей и 4 девушки. Наугад выбирают команду из 4 человек. Найдите вероятность того, что в команде юношей больше, чем девушек.

18. Из карточек с числами от 1 до 9 наугад выбирают 3. Найдите вероятность того, что сумма выбранных чисел чётная. Сначала перечислите возможные количества нечётных чисел в наборе.

Комбинаторика + условие

№ 19–24 • Пересчитываем пространство исходов

Во всех задачах выбор равновероятный; шары и карточки не возвращают обратно.

19. В коробке 6 красных и 4 синих шара. Наугад выбрали 3 шара. Известно, что среди них есть хотя бы один синий. Найдите вероятность того, что красных ровно два.

20. В коробке 5 красных и 3 синих шара. Наугад выбрали 4 шара. Известно, что красных не более двух. Найдите вероятность того, что красных ровно два.

21. Из 10 билетов, среди которых 3 выигрышных, наугад выбрали 4. Известно, что есть хотя бы один выигрыш. Найдите вероятность того, что выигрышный билет ровно один.

22. Одну из двух коробок выбирают с равными вероятностями. В первой 4 красных и 2 синих шара, во второй — 2 красных и 4 синих. Из выбранной коробки наугад берут 2 шара. Оба красные. Найдите вероятность того, что выбрали первую коробку.

23. В первой урне 3 белых и 2 чёрных шара, во второй — 2 белых и 3 чёрных. Из первой во вторую перекладывают случайный шар. Затем из второй наугад берут два шара. Оба белые. Найдите вероятность того, что переложенный шар был белым.

24. В коробке 7 красных и 3 синих шара. Наугад выбрали 5 шаров, среди которых оказалось не более 3 красных. Из этих пяти наугад выбирают один. Найдите вероятность того, что он синий.

Ответы и ход решения

№ 1–12 • Открывайте после самостоятельного решения

1. 4 пары с суммой 9; подходят (5; 4) и (6; 3).

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. Из 16 исходов исключаем четыре решки; два орла имеют 6 исходов.

$$P = \frac{C_4^2}{2^4 - 1} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

3. После красного остаются 4 красных среди 8 шаров.

$$a)\ \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \qquad b)\ \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$$

4–5. Сначала учитываем оба завода, затем выделяем брак завода Б.

$$4)\ 0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}4 \cdot 0{,}08 = 0{,}05; \quad 5)\ \frac{0{,}032}{0{,}05} = 0{,}64$$

6. После переноса белого белых 3 из 6, после чёрного — 2 из 6.

$$P = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{9}$$

7–8. 7: а) 10; б) 20; в) 28; г) 1 (единственный пустой набор).
8: порядок двух дежурных не важен.

$$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

9. Все наборы; выбор двух красных и одного синего; три синих.

$$a)\ C_{10}^3 = 120; \quad b)\ C_6^2 C_4^1 = 60; \quad c)\ C_4^3 = 4$$

10. (красные; синие): (2; 3), (3; 2), (4; 1), (5; 0).
Не более трёх красных: (2; 3) и (3; 2).

11–12. 11: выбираем 2 девушек и 2 юношей. 12: нечётных карточек 5.

$$11)\ C_4^2 C_5^2 = 60; \quad 12a)\ C_5^3 = 10; \quad 12b)\ C_9^3 - C_5^3 = 74$$

Ответы и ход решения

№ 13–24 • Сочетания и условная вероятность

13. Ровно два красных и один синий.

$$P=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$$

14. Возможны 1 или 2 красных; ноль невозможен.

$$P=\frac{C_5^1C_3^3+C_5^2C_3^2}{C_8^4}=\frac{1}{2}$$

15. Противоположное событие: 1 или 2 красных.

$$P=1-\frac{C_8^1C_4^4+C_8^2C_4^3}{C_{12}^5}=\frac{28}{33}$$

16. Исключаем наборы без выигрышей.

$$P=1-\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{5}{6}$$

17. Юношей 3 или 4.

$$P=\frac{C_5^3C_4^1+C_5^4}{C_9^4}=\frac{5}{14}$$

18. Нечётных чисел 0 или 2.

$$P=\frac{C_4^3+C_5^2C_4^1}{C_9^3}=\frac{11}{21}$$

19. Из знаменателя исключаем три красных.

$$P=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3-C_6^3}=\frac{3}{5}$$

20. Условию подходят 1 или 2 красных.

$$P=\frac{C_5^2C_3^2}{C_5^1C_3^3+C_5^2C_3^2}=\frac{6}{7}$$

21. Знаменатель: наборы хотя бы с одним выигрышем.

$$P=\frac{C_3^1C_7^3}{C_{10}^4-C_7^4}=\frac{3}{5}$$

22. Шансы пары красных в коробках: 6 из 15 и 1 из 15.

$$P=\frac{0{,}5\cdot\frac{6}{15}}{0{,}5\cdot\frac{6}{15}+0{,}5\cdot\frac{1}{15}}=\frac{6}{7}$$

23. После переноса белого пар белых 3, иначе 1; всех пар 15.

$$P=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{15}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{15}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{15}}=\frac{9}{11}$$

24. При условии: 21 набор с 3 синими и 105 наборов с 2 синими.

$$P=\frac{21}{126}\cdot\frac{3}{5}+\frac{105}{126}\cdot\frac{2}{5}=\frac{13}{30}$$