ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

Векторы на плоскости

Классная работа · от длины вектора к заданию №2 профильного ЕГЭ

90 минут | **6 блоков · 34 задания** | **Ответ — целое число или десятичная дробь**

Ученик: Дата: _____ Педагог: Е. Должкевич

Справочник: всё о векторах на плоскости для ЕГЭ №2

1. Координаты и длина

$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

«Конец минус начало»

$\vec{a} = (x; y) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Середина AB: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Пифагоровы тройки: 3, 4, 5 · 6, 8, 10 · 5, 12, 13 · 8, 15, 17

2. Действия покоординатно

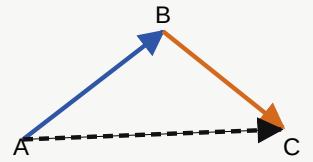
$\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$

$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$

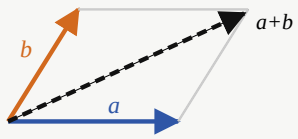
$k \cdot \vec{a} = (kx_1; ky_1)$

Длину суммы считаем только **после** того, как нашли координаты суммы: в общем случае $|\vec{a}+\vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

3. Правила сложения



треугольника: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



параллелограмма: диагональ из общего начала — $\vec{a}+\vec{b}$, вторая диагональ — $\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (из одной точки: «к уменьшаемому»)

4. Скалярное произведение

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Результат — **число**. > 0 ⇒ угол острый; = 0 ⇒ прямой; < 0 ⇒ тупой.

5. Угол, ⊥ и ∥

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

6. Длина без координат

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

Это «квадрат суммы» для векторов. Посчитали квадрат — не забудь извлечь корень!

φ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
cos φ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1

1 Координаты и длина вектора

Повторяем пройденное — разминка

10 мин

Разбор A(1; −2), B(7; 6). $\overrightarrow{AB} = (7 - 1; 6 - (-2)) = (6; 8)$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$.

1.1 A(2; −1), B(5; 3). Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Ответ: _____

1.2 A(−4; −3), B(4; 12). Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Ответ: _____

1.3 A(−4; 7), B(6; −1). Найдите координаты середины M отрезка AB.

Ответ: _____

1.4 $\overrightarrow{AB}$ = (4; −3), A(1; 5). Найдите координаты точки B.

Ответ: _____

1.5 Найдите длину вектора $\vec{a}$ = (√7; 3).

Ответ: _____

2 Сложение, вычитание, умножение на число

Сначала координаты результата, потом длина

15 мин

Разбор $\vec{a}$ = (1; 6), $\vec{b}$ = (1; −1). Найдём $|\vec{a} + 2\vec{b}|$. $2\vec{b}$ = (2; −2); $\vec{a} + 2\vec{b}$ = (1 + 2; 6 − 2) = (3; 4); длина $\sqrt{9 + 16}$ = **5**.

2.1 $\vec{a}$ = (3; −2), $\vec{b}$ = (1; 5). Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Ответ: _____

2.2 $\vec{a}$ = (−6; 1), $\vec{b}$ = (3; −4). Найдите $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

Ответ: _____

2.3 $\vec{a}$ = (14; 4), $\vec{b}$ = (2; −1). Найдите длину вектора $\vec{a} - 4\vec{b}$.

Ответ: _____

2.4 $\vec{a}$ = (1; 4), $\vec{b}$ = (3; 4). Найдите длину вектора $2\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: _____

2.5 $\vec{a}$ = (−2; 3), $\vec{b}$ = (−1; 3). Найдите $|3\vec{a} + 2\vec{b}|$.

Ответ: _____

2.6 Упростите: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

Ответ: _____

3 Скалярное произведение в координатах

Перемножаем «иксы», перемножаем «игреки», складываем

12 мин

Разбор $\vec{a}$ = (2; −3), $\vec{b}$ = (4; 1). $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = 2·4 + (−3)·1 = 8 − 3 = **5**. Для выражений вида $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$: сначала координаты $2\vec{a} - \vec{b}$, потом скалярное произведение.

3.1 $\vec{a}$ = (3; −2), $\vec{b}$ = (4; 5). Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____

3.2 $\vec{a}$ = (−1; 6), $\vec{b}$ = (7; 2). Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____

3.3 $\vec{a}$ = (5; −12). Найдите $\vec{a} \cdot \vec{a}$. Чему равна $|\vec{a}|$?

Ответ: _____

3.4 $\vec{a}$ = (1; 2), $\vec{b}$ = (3; −1). Найдите $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$.

Ответ: _____

3.5 $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (1; 4)$. Найдите $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b})$.

Ответ: _____

4 Угол между векторами. Перпендикулярность и коллинеарность

cos φ = скалярное произведение / произведение длин

13 мин

Разбор $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; 1)$. $\cos\varphi = \dfrac{1\cdot3 + 2\cdot1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \mathbf{45°}$.

4.1 Найдите косинус угла между $\vec{a} = (6; 8)$ и $\vec{b} = (3; -4)$.

Ответ: _____

4.2 Найдите угол (в градусах) между $\vec{a} = (1; 1)$ и $\vec{b} = (0; 3)$.

Ответ: _____

4.3 Найдите угол между $\vec{a} = (3; 4)$ и $\vec{b} = (-8; 6)$.

Ответ: _____

4.4 Найдите угол между $\vec{a} = (-1; \sqrt{3})$ и $\vec{b} = (2; 0)$.

Ответ: _____

4.5 При каком x векторы $\vec{a} = (x; 6)$ и $\vec{b} = (3; -2)$ перпендикулярны?

Ответ: _____

4.6 При каком y векторы $\vec{a} = (2; y)$ и $\vec{b} = (-6; 9)$ коллинеарны?

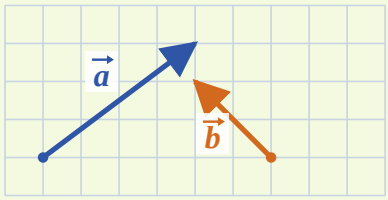
Ответ: _____

5 ЕГЭ №2: векторы на клетчатой бумаге

Сторона клетки равна 1

15 мин

Разбор

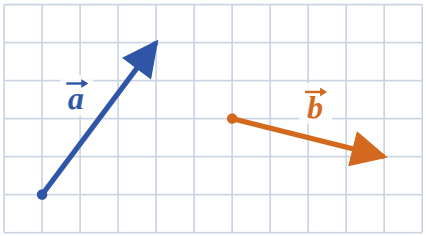


Координаты читаем по клеткам «от начала к концу»: $\vec{a}$: 3 вправо, 2 вверх ⇒ $\vec{a} = (3; 2)$; $\vec{b}$: 2 влево, 2 вверх ⇒ $\vec{b} = (-2; 2)$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot(-2) + 2\cdot2 = \mathbf{-2}$.

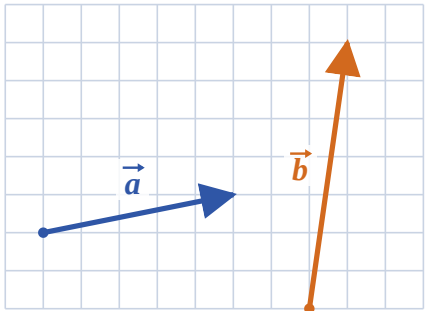
Сторона клетки = 1. Начало вектора отмечено точкой, конец — стрелкой.

5.1 Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.



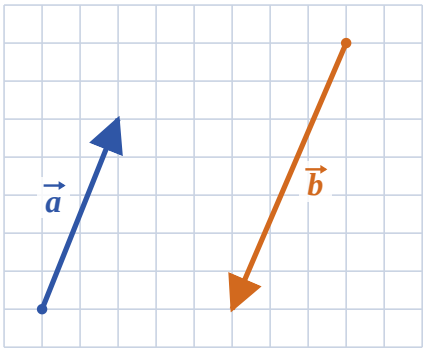
Ответ: _____

5.2 Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



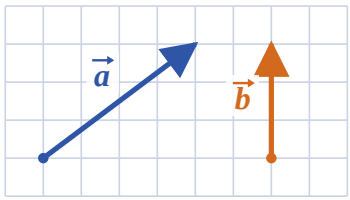
Ответ: _____

5.3 Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



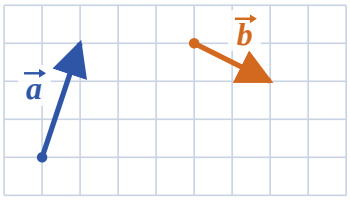
Ответ: _____

5.4 Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Ответ: _____

5.5 Найдите $\vec{a}\cdot(\vec{a} + 2\vec{b})$.



Ответ: _____

6 ЕГЭ №2: длины и угол без координат

Работают формулы из карточек 4 и 6

20 мин

Разбор $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, угол 60°. Найдём $|\vec{a} + \vec{b}|$. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot5\cdot\frac{1}{2} = 7{,}5$; $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 9 + 2\cdot7{,}5 + 25 = 49 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \mathbf{7}$.

Ловушка в фигурах: угол между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ — это угол, когда векторы отложены **от одной точки**. В треугольнике ∠B = 60°, а угол между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ равен 180° − 60° = 120°.

6.1 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, угол между ними 60°. Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ответ: _____

6.2 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, угол между ними 120°. Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ответ: _____

6.3 $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 5$, угол между ними 60°. Найдите $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Ответ: _____

6.4 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, угол между ними 60°. Найдите $(2\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b})$.

Ответ: _____

6.5 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$. Найдите угол между векторами (в градусах).

Ответ: _____

6.6 ABCD — квадрат со стороной 6. Найдите $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Ответ: _____

6.7 ABC — правильный треугольник со стороной 4. Найдите $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ответ: _____

ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

Векторы · Домашняя работа

Повторение базы и задания формата ЕГЭ №2

≈ 60 минут | 23 задания + 2 ★ | Пользуйся справочником из классной работы

Ученик: Дата: _____ Педагог: Е. Должкевич

Порядок работы. 1) Выпиши координаты всех векторов. 2) Посчитай координаты выражения. 3) Только потом длину или скалярное произведение. 4) В блоке E начинай с $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

A Координаты и длина

A1 A(−2; 3), B(4; 11). Найдите $|\overrightarrow{AB}|$.

Ответ: _____

A2 Найдите длину вектора $\vec{a} = (-9; -12)$.

Ответ: _____

A3 A(3; −5), B(−7; 1). Найдите координаты середины отрезка AB.

Ответ: _____

B Действия с векторами

B1 $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (1; 5)$. Найдите $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

Ответ: _____

B2 $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (3; -2)$. Найдите $|\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Ответ: _____

B3 $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (-1; 3)$. Найдите $|3\vec{a} + 2\vec{b}|$.

Ответ: _____

B4 Упростите: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.

Ответ: _____

C Скалярное произведение и угол

C1 $\vec{a} = (4; -3)$, $\vec{b} = (2; 5)$. Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ответ: _____

C2 Найдите угол между $\vec{a} = (-2; 5)$ и $\vec{b} = (5; 2)$.

Ответ: _____

C3 $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (2; -1)$. Найдите $(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{b}$.

Ответ: _____

C4 Найдите косинус угла между $\vec{a} = (8; 6)$ и $\vec{b} = (4; -3)$.

Ответ: _____

C5 При каком x векторы $\vec{a} = (x; -4)$ и $\vec{b} = (6; 3)$ перпендикулярны?

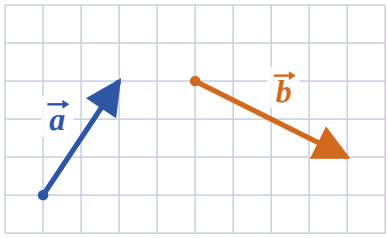
Ответ: _____

C6 При каком y векторы $\vec{a} = (3; y)$ и $\vec{b} = (-9; 12)$ коллинеарны?

Ответ: _____

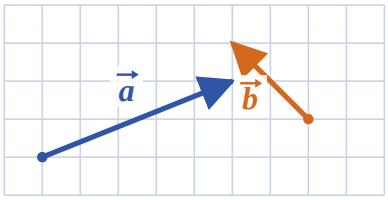
D Клетчатая бумага (сторона клетки 1)

D1 Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b}$.



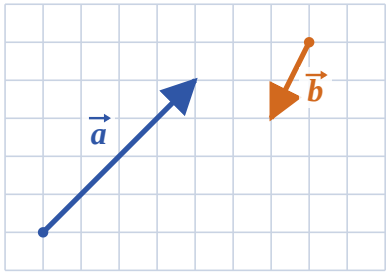
Ответ: _____

D2 Найдите $|\vec{a}+\vec{b}|$.



Ответ: _____

D3 Найдите длину вектора $\vec{a}-2\vec{b}$.



Ответ: _____

E Без координат

E1 $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=5$, угол 60°. Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ответ: _____

E2 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. Найдите $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Ответ: _____

E3 $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, угол 120°. Найдите $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Ответ: _____

E4 $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=3$. Найдите $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$.

Ответ: _____

E5 ABCD — прямоугольник, AB = 3, AD = 4. Найдите $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

Ответ: _____

★ Задачи со звёздочкой

★1 $\vec{a}=(4;7)$, $\vec{b}=(2;1)$. При каком k вектор $\vec{a}+k\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$?

Ответ: _____

★2 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$ и $|\vec{a}+\vec{b}|=3$. Найдите угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (в градусах).

Ответ: _____

Самопроверка. Сумма ответов блока B (без B4) равна 28; сумма ответов блока E равна 83. Не сходится — ищи ошибку.