Условная вероятность

Домашнее задание · 22 задачи · около 120 минут

Фамилия, имя: _____ Дата: _____

Памятка

Условная вероятность	$P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B) > 0$. При равновозможных исходах это доля исходов события B, в которых наступает и A.
Умножение	$P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B)$. Для независимых событий $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
Полная вероятность	Если $H_1, \dots, H_n$ попарно несовместны и вместе дают всё пространство, то $P(A) = \sum_i P(H_i)\,P(A \mid H_i)$.
Формула Байеса	$P(H_k \mid A) = \dfrac{P(H_k)\,P(A \mid H_k)}{P(A)}$.

Совет: в задачах уровней 2--4 рисуйте дерево вероятностей. Во всех задачах монеты и кубики симметричные, броски независимые.

Уровень 1. Разминка

8 класс · ≈ 25 минут

Сужение пространства исходов: из всех исходов оставляем только те, где известное событие произошло.

1. Бросают игральный кубик. Известно, что выпало чётное число очков. Найдите вероятность того, что выпало больше трёх очков.

2. В классе 25 учеников: 14 девочек и 11 мальчиков. В шахматный кружок ходят 6 девочек и 4 мальчика. Случайно выбранный ученик этого класса оказался шахматистом. Найдите вероятность того, что это девочка.

3. Бросают две монеты. Известно, что хотя бы одна из них выпала орлом. Найдите вероятность того, что орлом выпали обе.

4. Кафе опросило 200 посетителей: что они заказывают к завтраку.

	Кофе	Чай	Всего
Моложе 30 лет	54	26	80
30 лет и старше	36	84	120
Всего	90	110	200

Посетителя выбирают случайно. Найдите:

а) вероятность того, что он заказал кофе, если известно, что ему меньше 30 лет;
б) вероятность того, что ему меньше 30 лет, если известно, что он заказал кофе;
в) вероятность того, что он заказал чай, если известно, что ему 30 лет или больше.

Сравните ответы пунктов а) и б). Почему они различаются?

5. Бросают два игральных кубика. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что хотя бы на одном кубике выпало 5 очков.

6. В коробке 4 красных и 6 синих шаров. Из неё наугад один за другим, без возвращения, вынимают два шара.

а) Первый шар оказался красным. Найдите вероятность того, что второй тоже красный.
б) Найдите вероятность того, что оба шара красные.

Уровень 2. Деревья и полная вероятность

9 класс · ≈ 25 минут

Правило умножения вдоль ветки дерева и сложение по веткам.

7. Бросают два игральных кубика. Известно, что сумма выпавших очков больше 9. Найдите вероятность того, что на первом кубике выпало 6 очков.

8. Монету бросают три раза. Известно, что орёл выпал хотя бы один раз. Найдите вероятность того, что орёл выпал ровно два раза.

9. В урне 3 белых и 5 чёрных шаров. Из неё наугад один за другим, без возвращения, вынимают два шара. Цвет первого шара неизвестен. Найдите вероятность того, что второй шар белый. Сравните ответ с вероятностью того, что белым окажется первый шар.

10. Магазин получает лампочки с двух заводов: 70 % с завода A и 30 % с завода B. Среди лампочек завода A бракованных 2 %, среди лампочек завода B 5 %. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине лампочка окажется бракованной.

11. Охотник берёт наугад одно из 10 ружей. Шесть из них пристреляны. Из пристрелянного ружья он попадает в мишень с вероятностью 0,9, из непристрелянного с вероятностью 0,4. Охотник делает один выстрел. Найдите вероятность того, что он промахнётся.

Уровень 3. Формат ЕГЭ

профиль, задание 5 · ≈ 35 минут

Ответ записывайте десятичной дробью; если требуется, округляйте, как указано в условии.

12. Продолжение задачи 10. Купленная лампочка оказалась бракованной. Найдите вероятность того, что она изготовлена на заводе B. Ответ округлите до сотых.

13. Заболеванием страдают 5 % пациентов, обратившихся в клинику с определёнными симптомами. Для диагностики делают анализ. Если пациент болен, анализ положителен с вероятностью 0,9. Если пациент здоров, анализ всё равно оказывается положительным с вероятностью 0,01.

а) Найдите вероятность того, что у случайно выбранного пациента анализ будет положительным.

б) У пациента анализ положительный. Найдите вероятность того, что он действительно болен. Ответ округлите до сотых.

14. Агрофирма закупает яйца в двух хозяйствах. Среди яиц из первого хозяйства 50 % высшей категории, среди яиц из второго хозяйства 30 %. Всего высшую категорию получают 42 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

15. В городе 40 % взрослого населения составляют мужчины. Пенсионеры составляют 18 % взрослого населения, причём среди женщин доля пенсионеров равна 20 %. Для опроса случайно выбран взрослый мужчина. Найдите вероятность того, что он пенсионер.

16. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что хотя бы один раз выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что сумма очков больше 9. Ответ округлите до сотых.

17. В турнире участвуют 8 команд, все разной силы; в каждой встрече побеждает более сильная команда, ничьих не бывает. В первой игре встречаются две случайно выбранные команды. Проигравшая выбывает, победитель играет со следующим случайно выбранным соперником из ещё не игравших, и так далее. Известно, что команда «Альфа» выиграла первые четыре игры турнира. Найдите вероятность того, что она выиграет и пятую игру. Ответ округлите до сотых.

Уровень 4. Сложнее ЕГЭ

олимпиадные идеи · ≈ 35 минут

Здесь интуиция часто подводит. Перед вычислением запишите свою догадку, потом сравните её с ответом.

18. В семье двое детей. Рождение мальчика и девочки равновероятно, дни недели рождения равновероятны, все эти события независимы. Найдите вероятность того, что оба ребёнка мальчики, если известно, что

а) хотя бы один из детей мальчик;
б) старший ребёнок мальчик;
в) хотя бы один из детей мальчик, родившийся во вторник.

Объясните, почему в пункте в) ответ ближе к $\frac{1}{2}$, чем в пункте а).

19. Игра «три двери». За одной из дверей приз, за остальными пусто. Игрок выбирает дверь. Ведущий, зная, где приз, открывает одну из оставшихся пустых дверей (если таких несколько, выбирает наугад) и предлагает игроку сменить выбор.

а) Найдите вероятность выигрыша, если игрок остаётся при своём выборе, и если он меняет дверь.
б) Дверей четыре. Ведущий открывает одну пустую дверь из трёх невыбранных. Игрок либо остаётся при своём выборе, либо переходит на одну из двух оставшихся закрытых дверей, выбирая её наугад. Найдите вероятность выигрыша в каждом случае.

20. Продолжение задачи 13. Пациенту с положительным анализом сделали повторный анализ, результат которого не зависит от первого (при тех же вероятностях ошибок). Он тоже оказался положительным. Найдите вероятность того, что пациент болен. Ответ округлите до тысячных. Сравните с ответом задачи 13 б).

21. В первой урне 3 белых и 2 чёрных шара, во второй 2 белых и 4 чёрных. Из первой урны наугад перекладывают один шар во вторую, после чего из второй урны наугад вынимают шар. Он оказался белым. Найдите вероятность того, что переложенный шар был белым. Ответ округлите до сотых.

22. Игральный кубик бросают до тех пор, пока не выпадет шестёрка. Известно, что во всех бросках выпадали только чётные числа (то есть до шестёрки выпадали лишь 2 и 4). Найдите вероятность того, что

а) шестёрка выпала при первом же броске;
б) понадобилось ровно два броска.

Подсказка: вероятность того, что шестёрка выпала на n-м броске и все броски чётные, равна $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$; сложите такие вероятности по всем n как бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

Ответы

№	Ответ	Комментарий
Уровень 1		
1	$\frac{2}{3}$	Чётные: 2, 4, 6; из них больше трёх: 4, 6.
2	0,6	$6/10$; число всех учеников в классе на ответ не влияет.
3	$\frac{1}{3}$	Остаются исходы ОО, ОР, РО.
4	а) 0,675; б) 0,6; в) 0,7	$54/80$, $54/90$, $84/120$. Условия в а) и б) задают разные группы людей.
5	0,4	Сумма 8: (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2); подходят 2 исхода из 5.
6	а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{15}$	$3/9$; $\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}$.
Уровень 2		
7	0,5	Сумма больше 9: 6 исходов, из них с шестёркой на первом кубике 3.
8	$\frac{3}{7}$	7 исходов с хотя бы одним орлом, из них 3 с ровно двумя.
9	0,375	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{8}$, то же, что для первого шара.
10	0,029	$0{,}7\cdot0{,}02+0{,}3\cdot0{,}05$.
11	0,3	$0{,}6\cdot0{,}1+0{,}4\cdot0{,}6$.
Уровень 3		
12	0,52	$0{,}015/0{,}029=15/29\approx0{,}517$.
13	а) 0,0545; б) 0,83	$0{,}045/0{,}0545=90/109\approx0{,}826$.
14	0,6	$0{,}5x+0{,}3(1-x)=0{,}42$.
15	0,15	Женщин-пенсионеров $0{,}6\cdot0{,}2=0{,}12$, мужчин-пенсионеров $0{,}06$; $0{,}06/0{,}4$.
16	0,45	$5/11$: 11 исходов с шестёркой, из них сумма больше 9 в пяти.
17	0,83	«Альфа» сильнее четырёх случайных соперников, то есть сильнейшая из 5 команд; шанс оказаться сильнейшей из 6: $\frac{1/6}{1/5}=\frac{5}{6}$.
Уровень 4		
18	а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{13}{27}$	В в) из $14^2=196$ равновероятных пар «пол + день» условию удовлетворяют 27, из них 13 пар двух мальчиков.
19	а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{8}$	б) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$: менять выгодно и при четырёх дверях.
20	0,998	$\frac{0{,}05\cdot0{,}81}{0{,}05\cdot0{,}81+0{,}95\cdot0{,}0001}=\frac{8100}{8119}\approx0{,}9977$.
21	0,69	$\frac{0{,}6\cdot\frac{3}{7}}{0{,}6\cdot\frac{3}{7}+0{,}4\cdot\frac{2}{7}}=\frac{9}{13}$.
22	а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{9}$	Сумма прогрессии $\frac{1}{6}:\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}$; $\frac{1/6}{1/4}$ и $\frac{1/18}{1/4}$.