Уравнение окружности

Рабочая тетрадь • урок — 60 минут • домашняя работа — 60 минут

Ученик: Дата: _____

Что научимся делать

Находить центр и радиус по уравнению, составлять уравнение окружности, проверять точки и строить окружность на координатной плоскости.

Главная формула

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

C(a; b) — центр окружности; **R > 0** — радиус. Буквы x и y обозначают координаты любой точки окружности.

Окружность — множество точек, находящихся на одном и том же расстоянии R от центра. Формула получается из теоремы Пифагора: квадрат расстояния от (x; y) до C(a; b) равен $(x - a)^2 + (y - b)^2$.

Два правила, которые важно не перепутать

1. В скобках знак противоположен знаку координаты центра:
$(x - 3)^2 \to a = 3$; $(x + 3)^2 \to a = -3$.
2. Справа стоит **квадрат** радиуса: если $R^2 = 25$, то $R = 5$.

Как проверить точку $M(x_0; y_0)$

Вычисли $S = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$ и сравни с R^2:
$S = R^2$ — на окружности;
$S < R^2$ — внутри окружности;
$S > R^2$ — вне окружности.

Работай в тетради или на свободных строках. Для построений нужны линейка и циркуль. Ответы открывай после самостоятельной попытки.

Разобранные примеры

Изучи вместе с преподавателем • теория и примеры — первые 10 минут урока

Пример 1. Найти центр и радиус

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.
Перепишем $x + 2$ как $x - (-2)$. Поэтому $a = -2$, $b = 1$.
$R^2 = 9$, значит $R = 3$. **Ответ: C(−2; 1), R = 3.**

Пример 2. Составить уравнение

Центр C(3; −1), радиус R = 4.
Подставляем $a = 3$, $b = -1$, $R^2 = 16$ в главную формулу.
Ответ: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

Пример 3. Проверить положение точек

Дана окружность $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.
A(4; 2): $S = (4 - 1)^2 + (2 + 2)^2 = 9 + 16 = 25$ — на окружности.
B(1; 0): $S = 0^2 + 2^2 = 4 < 25$ — внутри.
D(7; −2): $S = 6^2 + 0^2 = 36 > 25$ — вне окружности.

Пример 4. Известны центр и точка окружности

Центр C(−1; 2), окружность проходит через A(2; 6).
$R^2 = (2 + 1)^2 + (6 - 2)^2 = 9 + 16 = 25$.
Ответ: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Пример 5. Найти точки с заданной координатой

$x^2 + (y - 1)^2 = 9$. Найдём точки с $x = 0$.
$(y - 1)^2 = 9$, поэтому $y - 1 = 3$ или $y - 1 = -3$.
Получаем $y = 4$ или $y = -2$. **Ответ: (0; 4), (0; −2).**

Как построить окружность

Отметь центр C(a; b). От него отсчитай R клеток вправо, влево, вверх и вниз (если 1 клетка = 1). Проведи окружность через четыре полученные точки. Масштаб осей должен быть одинаковым.

Урок • часть 1

Всего 60 минут: 10 + 5 + 15 + 15 + 10 + 5 • примеры уже входят во время урока

1. Разминка • 5 минут

1.1. Вычисли: а) $(-3)^2$; б) $(2-5)^2$; в) $(-2+6)^2$.
1.2. Найди положительное R: а) $R^2 = 16$; б) $R^2 = 49$.
1.3. Реши: а) $t^2 = 9$; б) $(t-1)^2 = 4$.

2. Центр, радиус, уравнение • 15 минут

2.1. Для каждой окружности запиши центр C и радиус R.
а) $x^2 + y^2 = 25$;
б) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$;
в) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$;
г) $x^2 + (y+5)^2 = 36$.

2.2. Составь уравнение окружности.
а) C(0; 0), R = 3;
б) C(2; −4), R = 5;
в) C(−1; 3), R = 2.

2.3. Ученик написал: «В уравнении $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ центр C(2; −3), радиус 16». Найди и исправь ошибки.

Урок • часть 2

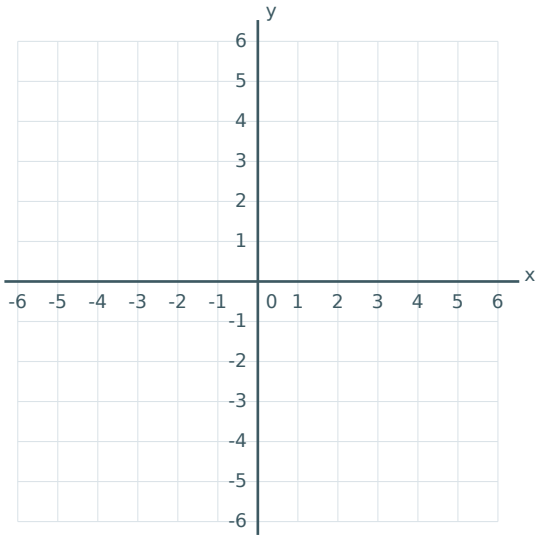
Показывай вычисления, а не только итоговый ответ

3. Применяем формулу • 15 минут

3.1. Для окружности $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ определи положение точек A(5; 3), B(2; 1), D(8; −1): на окружности, внутри или вне её.

3.2. Составь уравнение окружности с центром C(1; −2), проходящей через A(4; 2).

3.3. Построй $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$. Отметь центр и четыре опорные точки. На сетке 1 клетка = 1.



4. Самостоятельная проверка • 10 минут

4.1. Найди центр и радиус: $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 49$.
4.2. Запиши уравнение окружности с центром C(−3; −1) и радиусом 4.
4.3. Найди все точки окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 16$, у которых $x = 2$.

5. Разбор ошибок • 5 минут

Сверь ответы. Объясни вслух, как находишь знак координаты центра и радиус. Исправь одну ошибку и запиши правило, которое поможет её не повторить.

Домашняя работа • часть 1

60 минут: повторение 5 + блок 1 — 10 + блок 2 — 15 + блок 3 — 20 + проверка 10

Повтори правило • 5 минут

Не подсматривая, запиши главную формулу и объясни, что означают a, b и R. Затем проверь себя по первой странице.

Д1. Находим центр и радиус • 10 минут

Для каждого уравнения укажи центр C и радиус R.
Д1.1. $x^2 + y^2 = 64$.
Д1.2. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$.
Д1.3. $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
Д1.4. $(x - 1)^2 + y^2 = 49$.

Д2. Составляем уравнения • 15 минут

Д2.1. Центр C(−2; 4), радиус 3.
Д2.2. Центр C(5; 0), радиус 6.
Д2.3. Центр C(1; −3), диаметр 10. Сначала найди радиус.
Д2.4. Центр C(−2; 1), окружность проходит через A(1; 5).

Подсказка к Д2.4: найди R^2 подстановкой координат точки. Вычислять R отдельно для записи уравнения необязательно.

Домашняя работа • часть 2

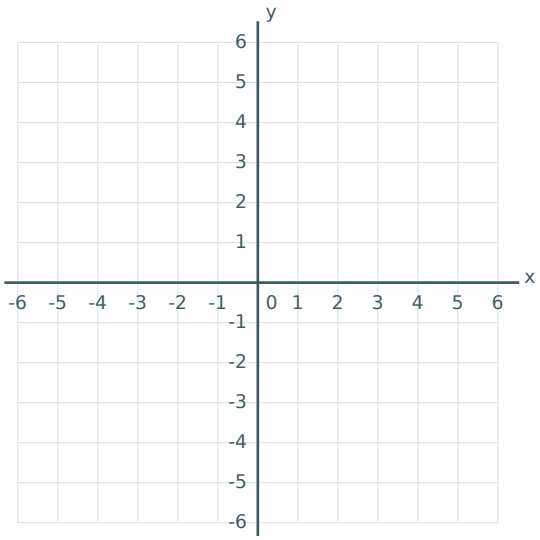
Для вычислений используй свободные строки и отдельную тетрадь

Д3. Проверяем, находим, строим • 20 минут

Д3.1. Дана окружность $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Определи положение A(3; 2), B(−1; 4), D(−1; 7). Для каждой точки запиши вычисление.

Д3.2. Найди все точки окружности $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$, у которых $y = 1$.

Д3.3. Построй $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$. Подпиши центр и четыре опорные точки. На сетке 1 клетка = 1.



Д4. Проверка и исправления • 10 минут

Д4.1. В решении «C(−4; 2), R = 3 → $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 3$» исправь все ошибки.
Д4.2. Открой ответы. Перерешай задания, в которых ошибся, и объясни причины ошибок. Если ошибок нет, проверь подстановкой две опорные точки из Д3.3.

Ответы • урок

Сначала выполни задания, затем сверь результаты

1. Разминка

1.1. а) 9; б) 9; в) 16.
1.2. а) 4; б) 7.
1.3. а) $t = -3$ или $t = 3$; б) $t = -1$ или $t = 3$.

2. Центр, радиус, уравнение

2.1. а) $C(0; 0)$, $R = 5$; б) $C(4; 2)$, $R = 3$;
в) $C(-3; 1)$, $R = 4$; г) $C(0; -5)$, $R = 6$.

2.2. а) $x^2 + y^2 = 9$;
б) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$;
в) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

2.3. $C(-2; 3)$, $R = 4$. Знаки обеих координат центра определены неверно; число 16 — это R^2, а не R.

3. Применяем формулу

3.1. A — на окружности: $3^2 + 4^2 = 25$.
B — внутри: $0^2 + 2^2 = 4 < 25$.
D — вне: $6^2 + 0^2 = 36 > 25$.

3.2. $R^2 = (4 - 1)^2 + (2 + 2)^2 = 25$.
Ответ: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

3.3. $C(-1; 1)$, $R = 3$. Опорные точки:
$(-4; 1)$, $(2; 1)$, $(-1; -2)$, $(-1; 4)$.
Правильный чертёж — окружность с этим центром через все четыре точки.

4. Самостоятельная проверка

4.1. $C(5; -2)$, $R = 7$.
4.2. $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$.
4.3. $(2; 4)$, $(2; -4)$. При $x = 2$ получаем $y^2 = 16$.

Ответы • домашняя работа

Краткие пояснения к заданиям, в которых легко ошибиться

Д1. Центр и радиус

Д1.1. C(0; 0), R = 8.
Д1.2. C(3; −4), R = 5.
Д1.3. C(−5; 2), R = 2.
Д1.4. C(1; 0), R = 7.

Д2. Уравнения окружностей

Д2.1. $(x + 2)^2 + (y − 4)^2 = 9$.
Д2.2. $(x − 5)^2 + y^2 = 36$.
Д2.3. R = 5; $(x − 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.
Д2.4. $R^2 = (1 + 2)^2 + (5 − 1)^2 = 25$;
$(x + 2)^2 + (y − 1)^2 = 25$.

Д3. Применение

Д3.1. A — на окружности: $(3 + 1)^2 + (2 − 2)^2 = 16$.
B — внутри: $(−1 + 1)^2 + (4 − 2)^2 = 4 < 16$.
D — вне: $(−1 + 1)^2 + (7 − 2)^2 = 25 > 16$.

Д3.2. (1; 1), (−5; 1).
При y = 1 получаем $(x + 2)^2 = 9$, то есть $x + 2 = ±3$.

Д3.3. C(1; −2), R = 2. Опорные точки:
(−1; −2), (3; −2), (1; −4), (1; 0).
Правильный чертёж — окружность с этим центром через все четыре точки.

Д4. Исправление ошибок

Д4.1. $(x + 4)^2 + (y − 2)^2 = 9$.
Исправлены знаки в обеих скобках и квадрат радиуса справа.

Д4.2. Например, для точки (3; −2):
$(3 − 1)^2 + (−2 + 2)^2 = 4$.
Для точки (1; 0): $(1 − 1)^2 + (0 + 2)^2 = 4$.
Обе точки удовлетворяют уравнению.