ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

Тригонометрия

От базы 8–9 класса к темам 10 класса

Ученик:

Формат: крупные задания для печати А4

В каждой теме: теория → пример → 10 заданий → ответы

Тема 1. Прямоугольный треугольник и теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике катеты образуют прямой угол, а гипотенуза лежит напротив него. Если катеты равны a и b, а гипотенуза c, то

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Чтобы найти неизвестный катет: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Полезно узнавать тройки 3-4-5, 5-12-13, 8-15-17.

Пример. Катеты равны 6 и 8. Тогда $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$.

1. Найди гипотенузу, если катеты равны 3 и 4.

2. Найди гипотенузу, если катеты равны 5 и 12.

3. Найди гипотенузу, если катеты равны 8 и 15.

4. Гипотенуза равна 13, один катет равен 5. Найди второй катет.

5. Гипотенуза равна 10, один катет равен 6. Найди второй катет.

6. Катеты равны 7 и 24. Найди гипотенузу.

7. Гипотенуза равна 17, один катет равен 8. Найди второй катет.

8. Катеты равны 9 и 12. Найди гипотенузу.

9. Гипотенуза равна 25, один катет равен 15. Найди второй катет.

10. Прямоугольник имеет стороны 6 и 8. Найди длину его диагонали.

Тема 2. Синус, косинус, тангенс и котангенс

Для острого угла α в прямоугольном треугольнике:

$$\sin\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}},$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}, \qquad \cot\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}.$$

Перед вычислением обязательно отметь, какой катет противолежит выбранному углу.

Пример. В треугольнике ABC угол $C = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, $AB = 5$. Для угла A: $\sin A = 3/5$, $\cos A = 4/5$, $\tan A = 3/4$, $\cot A = 4/3$.

1. $\angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, $AB = 5$. Найди $\sin A$ и $\cos A$.

2. В тех же условиях найди $\tan A$ и $\cot A$.

3. $\angle C = 90^\circ$, $BC = 5$, $AC = 12$, $AB = 13$. Найди $\sin A$ и $\cos A$.

4. В тех же условиях найди $\tan A$ и $\cot A$.

5. $\angle C = 90^\circ$, $BC = 8$, $AC = 15$, $AB = 17$. Найди $\sin A$.

6. В тех же условиях найди $\cos A$.

7. В тех же условиях найди $\tan A$.

8. $\angle C = 90^\circ$, $BC = 7$, $AC = 24$, $AB = 25$. Найди $\cot A$.

9. $\angle C = 90^\circ$, $BC = 9$, $AC = 12$, $AB = 15$. Найди $\sin A$ и $\tan A$.

10. Для угла B в треугольнике со сторонами $BC = 9$, $AC = 12$, $AB = 15$ найди $\sin B$ и $\cos B$.

Тема 3. Находим стороны по тригонометрическому отношению

Если известна гипотенуза c и угол α, то противолежащий катет равен $c\sin\alpha$, а прилежащий — $c\cos\alpha$. Если известен прилежащий катет b, то противолежащий можно найти как $b\tan\alpha$. Аналогично работаем, когда дано само значение отношения.

Пример. Если $\sin\alpha = 3/5$ и гипотенуза равна 20, то противолежащий катет равен $20 \cdot 3/5 = 12$.

1. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, гипотенуза 20. Найди противолежащий катет.

2. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, гипотенуза 25. Найди прилежащий катет.

3. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, прилежащий катет 16. Найди противолежащий катет.

4. $\cot\alpha = \frac{4}{3}$, противолежащий катет 9. Найди прилежащий катет.

5. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, гипотенуза 39. Найди противолежащий катет.

6. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, гипотенуза 26. Найди прилежащий катет.

7. $\tan\alpha = \frac{5}{12}$, прилежащий катет 36. Найди противолежащий катет.

8. $\cot\alpha = \frac{15}{8}$, противолежащий катет 16. Найди прилежащий катет.

9. $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, гипотенуза 51. Найди противолежащий катет.

10. $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, гипотенуза 50. Найди прилежащий катет.

Тема 4. Точные значения для $30°$, $45°$, $60°$

Нужно знать таблицу:

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Котангенс — величина, обратная тангенсу.

Пример. $\sin 30° + \cos 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

1. Вычисли $\sin 30°$.

2. Вычисли $\cos 60°$.

3. Вычисли $\tan 45°$.

4. Вычисли $\cos 45°$.

5. Вычисли $\sin 60°$.

6. Вычисли $\tan 30°$.

7. Вычисли $\cot 60°$.

8. Вычисли $2\sin 30° + \cos 60°$.

9. Вычисли $\sin 45° \cdot \sqrt{2}$.

10. Вычисли $\tan 60° \cdot \tan 30°$.

Тема 5. Решаем прямоугольные треугольники

Чтобы найти сторону, сначала выбери подходящее отношение: синус связывает противолежащий катет и гипотенузу, косинус — прилежащий катет и гипотенузу, тангенс — два катета. В этой теме используются специальные углы, поэтому калькулятор не нужен.

Пример. Гипотенуза 10, угол 30°. Катет напротив этого угла: $10 \sin 30^\circ = 5$.

1. Гипотенуза 14, угол 30°. Найди катет напротив угла.

2. Гипотенуза 18, угол 60°. Найди катет, прилежащий к углу.

3. Гипотенуза $8\sqrt{2}$, угол 45°. Найди любой катет.

4. Прилежащий катет 6, угол 45°. Найди противолежащий катет.

5. Прилежащий катет 5, угол 60°. Найди противолежащий катет.

6. Противолежащий катет 4, угол 30°. Найди гипотенузу.

7. Прилежащий катет $3\sqrt{3}$, угол 30°. Найди гипотенузу.

8. Противолежащий катет $6\sqrt{3}$, угол 60°. Найди гипотенузу.

9. Катет напротив 45° равен 11. Найди гипотенузу.

10. Лестница длиной 10 м образует с землёй угол 30°. На какую высоту поднимется её верхний конец?

Тема 6. Основное тригонометрическое тождество

Для любого угла, где выражения определены,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Для острого угла синус и косинус положительны. Также

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Пример. Если $\sin\alpha = 3/5$ и α острый, то $\cos\alpha = \sqrt{1 - 9/25} = 4/5$.

1. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, α острый. Найди $\cos\alpha$.

2. $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, α острый. Найди $\sin\alpha$.

3. $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, α острый. Найди $\cos\alpha$.

4. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, α острый. Найди $\tan\alpha$.

5. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$. Найди $\cot\alpha$.

6. Упрости: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 3$.

7. Упрости: $5(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2$.

8. Если $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, найди $\cot\alpha$.

9. Если $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и α острый, найди $\tan\alpha$.

10. Если $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ и α острый, найди $\sin\alpha$ и $\tan\alpha$.

Тема 7. Связи между tan, cot, sin, cos

Полезные связи:

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1, \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Если дано одно отношение и угол острый, часто удобно представить прямоугольный треугольник с подходящими катетами.

Пример. Если $\tan\alpha = 2/3$, можно взять катеты 2 и 3, тогда гипотенуза $\sqrt{13}$, поэтому $\sin\alpha = 2/\sqrt{13}$.

1. Если $\tan\alpha = \frac{2}{5}$, найди $\cot\alpha$.

2. Если $\cot\alpha = 7$, найди $\tan\alpha$.

3. Упрости: $\tan\alpha \cdot \cot\alpha + 4$.

4. Упрости: $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cot\alpha$.

5. Упрости: $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \tan\alpha$.

6. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, угол острый. Найди $\sin\alpha$.

7. $\tan\alpha = \frac{5}{12}$, угол острый. Найди $\cos\alpha$.

8. $\cot\alpha = \frac{15}{8}$, угол острый. Найди $\sin\alpha$.

9. $\cot\alpha = \frac{24}{7}$, угол острый. Найди $\cos\alpha$.

10. $\tan\alpha = 1$, угол острый. Чему равен α?

Тема 8. Градусы и радианы

Полный оборот: $360^\circ = 2\pi$ рад, поэтому

$$180^\circ = \pi, \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}.$$

Для перевода градусов в радианы умножай на $\pi/180$. Для перевода радиан в градусы умножай на $180/\pi$.

Пример. $60^\circ = 60 \cdot \pi/180 = \pi/3$.

1. Переведи в радианы: 30°.

2. Переведи в радианы: 45°.

3. Переведи в радианы: 60°.

4. Переведи в радианы: 90°.

5. Переведи в радианы: 120°.

6. Переведи в градусы: $\frac{\pi}{6}$.

7. Переведи в градусы: $\frac{\pi}{4}$.

8. Переведи в градусы: $\frac{2\pi}{3}$.

9. Переведи в градусы: $\frac{3\pi}{2}$.

10. Переведи в градусы: 2π.

Тема 9. Единичная окружность и знаки функций

На единичной окружности $\cos\alpha$ — это x-координата точки, а $\sin\alpha$ — y-координата. Поэтому знаки зависят от четверти: I $(+,+)$, II $(-,+)$, III $(-,-)$, IV $(+,-)$ для $(\cos,\sin)$. Значения для углов $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ получаются из углов $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ с правильным знаком.

Пример. $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 1/2$, а $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$.

1. Вычисли $\sin 0^\circ$.

2. Вычисли $\cos 90^\circ$.

3. Вычисли $\sin 180^\circ$.

4. Вычисли $\cos 180^\circ$.

5. Вычисли $\sin 270^\circ$.

6. Вычисли $\cos 360^\circ$.

7. Вычисли $\sin 120^\circ$.

8. Вычисли $\cos 120^\circ$.

9. Вычисли $\sin 225^\circ$.

10. Вычисли $\cos 330^\circ$.

Тема 10. Простейшие тригонометрические уравнения на $0^\circ \le x < 360^\circ$

Сначала вспомни единичную окружность и найди все углы на одном полном обороте. Например, $\sin x = 1/2$ даёт $x = 30^\circ$ и 150°. Для $\cos x = 1/2$: 60° и 300°. Для $\tan x = 1$: 45° и 225°.

Пример. Решить $\cos x = -1$ при $0^\circ \le x < 360^\circ$. Ответ: $x = 180^\circ$.

1. Реши: $\sin x = 0$.

2. Реши: $\cos x = 0$.

3. Реши: $\sin x = 1$.

4. Реши: $\cos x = -1$.

5. Реши: $\sin x = \frac{1}{2}$.

6. Реши: $\cos x = \frac{1}{2}$.

7. Реши: $\sin x = -\frac{1}{2}$.

8. Реши: $\cos x = -\frac{1}{2}$.

9. Реши: $\tan x = 1$.

10. Реши: $\tan x = -1$.

Ответы

Проверяй ответы только после самостоятельного решения. Если ответ не совпал, сначала найди место ошибки, а не переписывай решение.

Тема 1. Прямоугольный треугольник и теорема Пифагора

1. 5
2. 13
3. 17
4. 12
5. 8
6. 25
7. 15
8. 15
9. 20
10. 10

Тема 2. Синус, косинус, тангенс и котангенс

1. $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$
2. $\tan A = \frac{3}{4}$, $\cot A = \frac{4}{3}$
3. $\frac{5}{13}$ и $\frac{12}{13}$
4. $\frac{5}{12}$ и $\frac{12}{5}$
5. $\frac{8}{17}$
6. $\frac{15}{17}$
7. $\frac{8}{15}$
8. $\frac{24}{7}$
9. $\sin A = \frac{3}{5}$, $\tan A = \frac{3}{4}$
10. $\sin B = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{3}{5}$

Тема 3. Находим стороны по тригонометрическому отношению

1. 12
2. 20
3. 12
4. 12
5. 15
6. 24
7. 15
8. 30
9. 24
10. 48

Тема 4. Точные значения для $30°$, $45°$, $60°$

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{2}$
3. 1
4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
7. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
8. $\frac{3}{2}$
9. 1
10. 1

Тема 5. Решаем прямоугольные треугольники

1. 7
2. 9
3. 8
4. 6
5. $5\sqrt{3}$
6. 8
7. 6
8. 12
9. $11\sqrt{2}$
10. 5 м

Тема 6. Основное тригонометрическое тождество

1. $\frac{4}{5}$
2. $\frac{12}{13}$
3. $\frac{15}{17}$
4. $\frac{5}{12}$
5. $\frac{12}{5}$
6. 4
7. 3
8. $\frac{4}{3}$
9. $\frac{12}{5}$
10. $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\tan\alpha = \frac{8}{15}$

Тема 7. Связи между tan, cot, sin, cos

1. $\frac{5}{2}$
2. $\frac{1}{7}$
3. 5
4. 1
5. 1
6. $\frac{3}{5}$
7. $\frac{12}{13}$
8. $\frac{8}{17}$
9. $\frac{24}{25}$
10. 45°

Тема 8. Градусы и радианы

1. $\frac{\pi}{6}$
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\frac{\pi}{3}$
4. $\frac{\pi}{2}$
5. $\frac{2\pi}{3}$
6. 30°
7. 45°
8. 120°
9. 270°
10. 360°

Тема 9. Единичная окружность и знаки функций

1. 0
2. 0
3. 0
4. -1
5. -1
6. 1
7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $-\frac{1}{2}$
9. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Тема 10. Простейшие тригонометрические уравнения на $0^\circ \leq x < 360^\circ$

1. $0^\circ, 180^\circ$
2. $90^\circ, 270^\circ$
3. 90°
4. 180°
5. $30^\circ, 150^\circ$
6. $60^\circ, 300^\circ$
7. $210^\circ, 330^\circ$
8. $120^\circ, 240^\circ$
9. $45^\circ, 225^\circ$
10. $135^\circ, 315^\circ$