ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

АЛГЕБРА 8–9

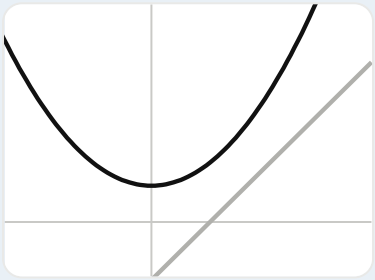
Прямая и парабола: задачи с параметром

Касание, пересечение, отсутствие общих точек · 20 задач

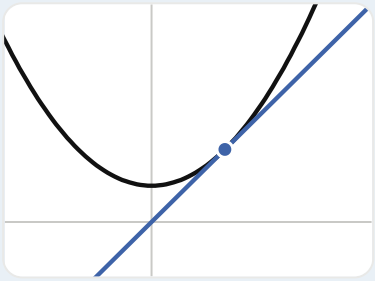
Имя: Дата: Решено: / 20

Памятка: как считать общие точки

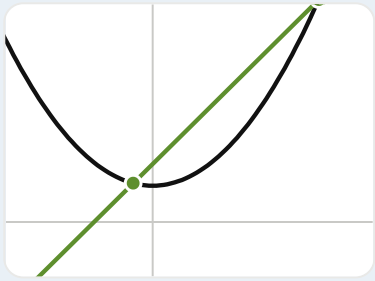
1. Приравняй правые части: $f(x) = g(x)$.
2. Перенеси всё в одну сторону и приведи к виду $Ax^2 + Bx + C = 0$.
3. Число корней = число общих точек. Его определяет дискриминант $D = B^2 - 4AC$.



D < 0
общих точек нет



D = 0
одна точка — касание



D > 0
две точки пересечения

Внимание. Если параметр стоит при x^2, сначала проверь случай $A = 0$: уравнение становится линейным и даёт один корень без всякого дискриминанта. Если у двух парабол одинаковые коэффициенты при x^2, то x^2 сокращается сразу.

Разобранный пример

При каких k прямая $y = kx + 2$ касается параболы $y = x^2 + 2x + 3$?

1) $x^2 + 2x + 3 = kx + 2 \Rightarrow x^2 + (2 - k)x + 1 = 0$.

2) Касание $\Leftrightarrow$ один корень $\Leftrightarrow$ $D = 0$: $(2 - k)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2 - k = \pm 2$.

3) $k = 0$ (касание в точке $x = -1$) или $k = 4$ (касание в точке $x = 1$).

4) Проверка: при $k = 4$ получаем $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ — полный квадрат, корень один ✓

Ответ: $k = 0$; $k = 4$.

А. Касание прямой и параболы

Условие касания: D = 0

1 При каких значениях k прямая $y = kx$ касается параболы $y = x^2 + 4$?

2 При каком значении b прямая $y = x + b$ касается параболы $y = x^2 - 3x + 5$?

3 При каком значении b прямая $y = -x + b$ касается параболы $y = 2x^2 + 3x + 1$?

4 При каких значениях k прямая $y = kx + 2$ касается параболы $y = -x^2 + 3x + 1$?

5 При каком значении b прямая $y = 2x + b$ касается параболы $y = x^2 + 6x + 10$? Найдите абсциссу точки касания.

6 Из начала координат проведены касательные к параболе $y = x^2 - 2x + 4$. Найдите их угловые коэффициенты и координаты точек касания.

Б. Сколько общих точек у прямой и параболы

Нет точек: D < 0 · две точки: D > 0

7 При каких значениях p прямая $y = 2x - 3$ и парабола $y = x^2 + px + 1$ не имеют общих точек?

8 При каких значениях m прямая $y = 2x + m$ пересекает параболу $y = x^2 - 2x$ в двух точках?

9 Прямая проходит через точку (1; 0) и имеет угловой коэффициент m. При каких m она касается параболы $y = x^2 + 3$?

10 При каких значениях a графики функций $y = ax^2 + 2$ и $y = 4x$ имеют ровно одну общую точку? ЛОВУШКА

В Две параболы

Вычти одну функцию из другой и исследуй получившееся уравнение

11 При каком значении c параболы $y = x^2 + 3$ и $y = -x^2 + 4x + c$ имеют ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки.

12 При каких значениях p параболы $y = x^2 + px + 3$ и $y = -x^2 + 1$ касаются?

13 При каких значениях a параболы $y = x^2 + a$ и $y = -x^2 + 2x$ пересекаются в двух точках?

14 При каком значении c параболы $y = 2x^2 - 3x + 1$ и $y = x^2 + x + c$ имеют ровно одну общую точку?

15 При каких значениях b параболы $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = -x^2 + bx - 5$ не имеют общих точек?

16 Докажите, что при любом a параболы $y = x^2 + 3x + a$ и $y = x^2 - x + 5$ имеют ровно одну общую точку. При каком a эта точка лежит на оси Oy? ЛОВУШКА

Г Повышенный уровень

Касание в заданной точке, модуль, общая касательная

17 Прямая $y = kx + b$ касается параболы $y = x^2$ в точке с абсциссой 3. Найдите k и b.

18 Парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 2x$ в точке (1; 2). Найдите b и c.

19 Сколько общих точек имеют графики $y = x^2 + 1$ и $y = k|x|$ в зависимости от значения k? МОДУЛЬ

20 Найдите все прямые, которые касаются одновременно парабол $y = x^2$ и $y = -(x - 2)^2$. Запишите их уравнения.

ТОЛЬКО ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

Ответы и ключевые подсказки

№	Ответ
1	$k = -4$; $k = 4$
2	$b = 1$
3	$b = -1$
4	$k = 1$; $k = 5$
5	$b = 6$; $x_0 = -2$
6	$k = -6$, точка $(-2; 12)$; $k = 2$, точка $(2; 4)$
7	$-2 < p < 6$
8	$m > -4$
9	$m = -2$; $m = 6$
10	$a = 0$ (уравнение линейное, точка $(\frac{1}{2}; 2)$); $a = 2$ (D = 0)
11	$c = 1$; точка $(1; 4)$
12	$p = -4$; $p = 4$
13	$a < \frac{1}{2}$
14	$c = -3$ (точка касания $x = 2$)
15	$-12 < b < 4$
16	$4x + a - 5 = 0$ — линейное, корень один при любом a; $a = 5$
17	$k = 6$; $b = -9$
18	$b = 0$; $c = 1$
19	$k < 2$ — нет; $k = 2$ — две; $k > 2$ — четыре
20	$y = 0$ и $y = 4x - 4$

Ход решения в нестандартных задачах

№6. Касательная через O(0; 0): $y = kx$. Уравнение $x^2 - (2 + k)x + 4 = 0$, $D = (2 + k)^2 - 16 = 0$.

№10. При $a = 0$ уравнение $4x - 2 = 0$ становится линейным — один корень без всякого D. Частая потеря ответа.

№16. Старшие коэффициенты совпадают, x^2 сокращается. Дискриминант здесь не нужен.

№19. Обе функции чётные: считаем корни $x^2 - kx + 1 = 0$ при $x > 0$ и удваиваем. Корни положительны при $k > 0$, $D = k^2 - 4$.

№20. $y = kx + b$. Условия: $k^2 + 4b = 0$ и $(k - 4)^2 - 16 - 4b = 0 \Rightarrow 2k^2 - 8k = 0$.