Область определения функции

Рабочий лист на занятие · от простых функций к комбинированным

Ученик: **Дата:** _____ **Решено:** _____ из 49

Что это такое

Область определения функции $D(y)$ – все значения x, при которых формулу можно вычислить. Ищем, **где формула «ломается»**, и исключаем эти x.

Что встретилось в формуле	Условие	Пример
Многочлен	ограничений нет	$y = x^2 - 3x \Rightarrow D(y) = (-\infty;\ +\infty)$
Дробь $\frac{A}{B}$	$B \neq 0$	$y = \frac{1}{x-4} \Rightarrow x \neq 4$
Корень чётной степени $\sqrt{A},\ \sqrt[4]{A}$	$A \geq 0$	$y = \sqrt{x+1} \Rightarrow x \geq -1$
Корень в знаменателе $\frac{1}{\sqrt{A}}$	$A > 0$ (строго!)	$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x > 0$
Корень нечётной степени $\sqrt[3]{A}$	ограничений нет	$\sqrt[3]{-8} = -2$

Алгоритм.

1. Выпиши все «опасные места»: знаменатели и корни чётной степени.
2. Запиши условие для каждого и собери их в систему.
3. Реши систему и запиши ответ промежутками.

Как записывать ответ

$[\,]$ – число входит; $(\,)$ – число не входит; у ∞ скобка всегда круглая; $\cup$ – «или» (объединение промежутков). Ответ «все числа, кроме 2» записывается так: $(-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

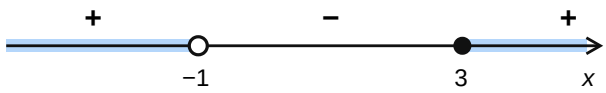
Ловушки. Не сокращай дробь до того, как нашёл $D(y)$: выколотая точка остаётся. Выражения вида $x^2 + 1$ положительны при всех x. Под корнем в знаменателе – строгое неравенство.

Разберём на примерах

Пример 1. $y = \dfrac{x+3}{x^2-4x}$. Знаменатель: $x^2 - 4x \neq 0 \ \Rightarrow\ x(x-4) \neq 0 \ \Rightarrow\ x \neq 0,\ x \neq 4$.
Ответ: $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

Пример 2. $y = \sqrt{8-2x} + \dfrac{1}{x+1}$. Два условия: $\begin{cases} 8 - 2x \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$
Ответ: $D(y) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 4]$.

Пример 3. $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$. Нужно $\dfrac{x-3}{x+1} \geq 0$. Нуль числителя $x = 3$ – закрашенная точка, нуль знаменателя $x = -1$ – выколотая (на ноль делить нельзя). Знаки справа налево: $+,\ -,\ +$.
Ответ: $D(y) = (-\infty;\ -1) \cup [3;\ +\infty)$.



A Многочлены и дроби

> Делить на ноль нельзя: знаменатель ≠ 0. У многочлена ограничений нет.

A1 $y = 3x - 7$

$D(y) =$ _____

A2 $y = x^2 - 4x + 1$

$D(y) =$ _____

A3 $y = \dfrac{5}{x - 2}$

$D(y) =$ _____

A4 $y = \dfrac{x + 1}{2x + 6}$

$D(y) =$ _____

A5 $y = \dfrac{7}{x^2 - 9}$

$D(y) =$ _____

A6 $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x + 5}$

$D(y) =$ _____

A7 $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

$D(y) =$ _____

A8 $y = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

$D(y) =$ _____

A9 $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

$D(y) =$ _____

A10 $y = \dfrac{3}{x^2 - 2x + 5}$

$D(y) =$ _____

B Корень чётной степени

> Под корнем чётной степени — неотрицательное число: подкоренное выражение ≥ 0. Корень нечётной степени определён при всех x.

B1 $y = \sqrt{x}$

$D(y) =$ _____

B2 $y = \sqrt{x - 3}$

$D(y) =$ _____

B3 $y = \sqrt{6 - 2x}$

$D(y) =$ _____

B4 $y = \sqrt{x^2 + 1}$

$D(y) =$ _____

B5 $y = \sqrt[4]{x + 2}$

$D(y) =$ _____

B6 $y = \sqrt[3]{x - 5}$

$D(y) =$ _____

B7 $y = \sqrt{9 - x^2}$

$D(y) =$ _____

B8 $y = \sqrt{x^2 - 16}$

$D(y) =$ _____

B9 $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

$D(y) =$ _____

B10 $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$

$D(y) =$ _____

C Корень и дробь вместе

Несколько ограничений — решаем систему. Корень в знаменателе: подкоренное выражение строго > 0.

C1 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$D(y) =$ _____

C2 $y = \dfrac{5}{\sqrt{4-x}}$

$D(y) =$ _____

C3 $y = \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$

$D(y) =$ _____

C4 $y = \sqrt{x+3} - \sqrt{1-x}$

$D(y) =$ _____

C5 $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-5}$

$D(y) =$ _____

C6 $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x^2-4}$

$D(y) =$ _____

C7 $y = \dfrac{\sqrt{x+4}}{x^2-1}$

$D(y) =$ _____

C8 $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-6x+8}}$

$D(y) =$ _____

C9 $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+7} + \dfrac{1}{x}$

$D(y) =$ _____

D Метод интервалов

Дробь под корнем должна быть ≥ 0. Решаем методом интервалов: нули числителя закрашиваем, нули знаменателя всегда выкалываем.

D1 $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

$D(y) =$ _____

D2 $y = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+4}}$

$D(y) =$ _____

D3 $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x+5)(2-x)}}$

$D(y) =$ _____

D4 $y = \sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-1}}$

$D(y) =$ _____

D5 $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{(x-2)^2}}$

$D(y) =$ _____

D6 $y = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+3}}$

$D(y) =$ _____

E Модуль и комбинированные

Всё вместе: модуль, квадратные неравенства, несколько корней и дробей.

E1 $y = \sqrt{|x| - 3}$

$D(y) =$ _____

E2 $y = \sqrt{4 - |x-1|}$

$D(y) =$ _____

E3 $y = \dfrac{2}{|x| - 2}$

$D(y) =$ _____

E4 $y = \sqrt{6 - x - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

$D(y) =$ _____

E5 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}}$

$D(y) =$ _____

E6 Найдите области определения двух функций. Совпадают ли они? Почему?

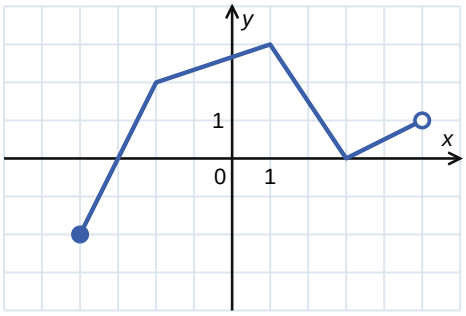
а) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 2}$ б) $y = \sqrt{x(x - 2)}$

а) $D(y) =$ _____ б) $D(y) =$ _____

F Графики и задачи в формате ОГЭ

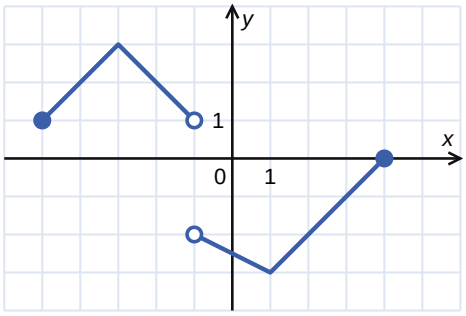
> Область определения на графике — это проекция графика на ось Ox. Закрашенная точка входит, выколотая — нет.

F1 На рисунке — график функции $y = f(x)$. Найдите $D(f)$.



$D(f) =$ _____

F2 На рисунке — график функции $y = f(x)$. Найдите $D(f)$.



$D(f) =$ _____

F3 Сколько целых чисел входит в область определения функции $y = \sqrt{12 + x - x^2}$?

Ответ: _____

F4 Найдите сумму всех целых чисел из области определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{\sqrt{3 - x}}$.

Ответ: _____

F5 Придумайте свою функцию с заданной областью определения.

а) $D(y) = [2;\ +\infty)$: $y =$ _____

б) $D(y) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$: $y =$ _____

в) $D(y) = [-1;\ 1]$: $y =$ _____

Для тех, кто хочет больше

★1 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$

$D(y) =$ _____

★2 $y = \sqrt{-(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1}$

$D(y) =$ _____

★3 При каких значениях a область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 2x + a}$ – вся числовая прямая?

Ответ: _____

Самопроверка

Раздел	A	B	C	D	E	F	★
Заданий	10	10	9	6	6	5	3
Решено верно							

Где ошибся чаще всего? Вернись к таблице на первой странице и найди нужное правило.

Область определения функции — ответы

все ответы проверены в SymPy (continuous_domain); ★2 и B6 — вручную

A. Многочлены и дроби		
A1	$y = 3x - 7$	$(-\infty;\ +\infty)$
A2	$y = x^2 - 4x + 1$	$(-\infty;\ +\infty)$
A3	$y = \dfrac{5}{x-2}$	$(-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$
A4	$y = \dfrac{x+1}{2x+6}$	$(-\infty;\ -3) \cup (-3;\ +\infty)$
A5	$y = \dfrac{7}{x^2-9}$	$(-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$
A6	$y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+5}$	$(-\infty;\ -5) \cup (-5;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$
A7	$y = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$	$(-\infty;\ 2) \cup (2;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$
A8	$y = \dfrac{4}{x^2+1}$	$(-\infty;\ +\infty)$ x²+1>0 при всех x
A9	$y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$	$(-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$ ловушка: сокращать нельзя, x=2 выколота
A10	$y = \dfrac{3}{x^2-2x+5}$	$(-\infty;\ +\infty)$ D=4-20<0, знаменатель не обращается в 0
B. Корень чётной степени		
B1	$y = \sqrt{x}$	$[0;\ +\infty)$
B2	$y = \sqrt{x-3}$	$[3;\ +\infty)$
B3	$y = \sqrt{6-2x}$	$(-\infty;\ 3]$
B4	$y = \sqrt{x^2+1}$	$(-\infty;\ +\infty)$ x²+1>0 всегда
B5	$y = \sqrt[4]{x+2}$	$[-2;\ +\infty)$ корень 4-й степени — чётный
B6	$y = \sqrt[3]{x-5}$	$(-\infty;\ +\infty)$ корень нечётной степени — без ограничений
B7	$y = \sqrt{9-x^2}$	$[-3;\ 3]$
B8	$y = \sqrt{x^2-16}$	$(-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$
B9	$y = \sqrt{x^2-5x+4}$	$(-\infty;\ 1] \cup [4;\ +\infty)$
B10	$y = \sqrt{-x^2+2x+8}$	$[-2;\ 4]$
C. Корень и дробь вместе		
C1	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$(0;\ +\infty)$ строго >0
C2	$y = \dfrac{5}{\sqrt{4-x}}$	$(-\infty;\ 4)$ строго >0
C3	$y = \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$	$[0;\ 5]$
C4	$y = \sqrt{x+3} - \sqrt{1-x}$	$[-3;\ 1]$
C5	$y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-5}$	$[2;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$
C6	$y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x^2-4}$	$[1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$
C7	$y = \dfrac{\sqrt{x+4}}{x^2-1}$	$[-4;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$

C8	$y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-6x+8}}$	$(-\infty;\ 2) \cup (4;\ +\infty)$ x²-6x+8>0 строго
C9	$y = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+7} + \dfrac{1}{x}$	$[-7;\ 0) \cup (0;\ 2]$
D. Метод интервалов		
D1	$y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$	$(-\infty;\ -2) \cup [1;\ +\infty)$
D2	$y = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+4}}$	$(-4;\ 3]$
D3	$y = \dfrac{1}{\sqrt{(x+5)(2-x)}}$	$(-5;\ 2)$ (x+5)(2-x)>0
D4	$y = \sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-1}}$	$[-3;\ 1) \cup [3;\ +\infty)$ нули -3, 3 (закр.), полюс 1 (выкол.)
D5	$y = \sqrt{\dfrac{x+1}{(x-2)^2}}$	$[-1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$ (x-2)²>0 при x≠2; нужно x+1≥0
D6	$y = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+3}}$	$(-3;\ -2] \cup [2;\ +\infty)$ x²-4≥0 и x+3>0
E. Модуль и комбинированные		
E1	$y = \sqrt{\lvert x\rvert - 3}$	$(-\infty;\ -3] \cup [3;\ +\infty)$ |x|≥3
E2	$y = \sqrt{4 - \lvert x-1\rvert}$	$[-3;\ 5]$ |x-1|≤4
E3	$y = \dfrac{2}{\lvert x\rvert - 2}$	$(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$
E4	$y = \sqrt{6-x-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$	$(-2;\ 2]$ x²+x-6≤0 и x>-2
E5	$y = \sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-1}}$	$(-\infty;\ -1) \cup (1;\ 2] \cup [3;\ +\infty)$ нули 2, 3; полюсы ±1
E6	а) $[2;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0] \cup [2;\ +\infty)$. Не совпадают: в а) каждый корень требует своё условие (x≥0 и x≥2), в б) достаточно x(x-2)≥0. Равенство √a·√b=√(ab) верно только при a,b≥0.	
F. Графики и задачи ОГЭ		
F1	$[-4;\ 5)$ левый конец закрашен, правый выколот	
F2	$[-5;\ -1) \cup (-1;\ 4]$ в x=-1 обе точки выколоты	
F3	**8** D=[-3; 4]: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4	
F4	**−12** D=[-5; 3): -5+…+2 = -12; число 3 не входит	
F5	Примеры: а) $y = \sqrt{x-2}$; б) $y = \dfrac{1}{x-1}$; в) $y = \sqrt{1-x^2}$ или $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$ любой верный вариант	
★		
★1	$\{3\}$ x≥3 и x≤3 — единственная точка	
★2	$\varnothing$ -(x-1)²≥0 только при x=1, но x≠1 из-за дроби: функция нигде не определена	
★3	$a \geq 1$ x²-2x+a≥0 при всех x ⇔ D=4-4a≤0; или (x-1)²+a-1≥0	

Что смотреть при проверке

A9 — сократил дробь и потерял x≠2 → правило «сначала D(y), потом преобразования».
B6 vs B5 — путаница чётной и нечётной степени корня.
C1, C2, C8 — нестрогое неравенство вместо строгого при корне в знаменателе.
D4, D5, E5 — знаки в методе интервалов; чётная кратность (x-2)² не меняет знак.
E6 — главный концептуальный вопрос урока: преобразования формулы могут менять D(y).
Ориентир: A–B ≈ 15 мин, C–D ≈ 20 мин, E–F ≈ 20 мин; ★ — по желанию или в ДЗ.