ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

Логарифмы

Рабочая тетрадь: от определения до заданий ЕГЭ части 2

$\log_2 8 = 3$

$a^{\log_a b} = b$

$\lg 1000 = 3$

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

$\ln e = 1$

14 разделов · 129 заданий · теория · примеры · ответы

УЧЕНИК

10 класс · подготовка к ЕГЭ

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

Евгений Должкевич

Начато: _____

КАК РАБОТАТЬ С ТЕТРАДЬЮ

1. Прочитайте синюю рамку с теорией и разберите зелёные примеры. Закройте решение примера и повторите его сами.
2. Красная рамка — типичные ошибки. Перед заданиями проверьте, что понимаете, в чём ошибка.
3. Решения записывайте в тетради, в бланк — только ответ. Задания идут от простых к сложным.
4. Сверяйтесь с ответами в конце тетради после всего раздела, а не после каждого задания.
5. Отмечайте в таблице на следующей странице, сколько заданий решено верно с первой попытки.

Содержание и прогресс

№	Раздел	Уровень	Верно	Дата
1	Степень с рациональным показателем	База · 8–9 класс	___ / 10	_____
2	Определение логарифма	База	___ / 10	_____
3	Основное логарифмическое тождество	База	___ / 10	_____
4	Логарифм произведения и частного	База	___ / 10	_____
5	Показатель степени в аргументе и основании	База → ЕГЭ	___ / 10	_____
6	Переход к новому основанию	ЕГЭ · часть 1	___ / 10	_____
7	Логарифмическая функция. ОДЗ и сравнение	База → ЕГЭ	___ / 10	_____
8	Вычисления в формате ЕГЭ	ЕГЭ · часть 1	___ / 10	_____
9	Простейшие логарифмические уравнения	ЕГЭ · часть 1	___ / 10	_____
10	Уравнения: замена и сведение к одному основанию	ЕГЭ · часть 2	___ / 10	_____
11	Простейшие логарифмические неравенства	ЕГЭ · база части 2	___ / 10	_____
12	Неравенства: замена и метод рационализации	ЕГЭ · часть 2	___ / 10	_____
13	Задачи с прикладным содержанием	ЕГЭ · часть 1	___ / 6	_____
14	Задачи со звёздочкой	Олимпиадный уровень	___ / 3	_____

Ориентир: раздел считается освоенным, если с первой попытки решено верно не меньше 8 заданий из 10. Если меньше 6 — перечитайте теорию и разберите примеры ещё раз, затем решите ошибочные задания заново.

Справочник: все формулы на одной странице

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$

СЛЕДСТВИЯ

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

$\log_a a^c = c$

$a^{\log_a b} = b$

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\lg b = \log_{10} b$

$\ln b = \log_e b$, $e \approx 2{,}718$

$\lg 2 \approx 0{,}301$; $\lg 3 \approx 0{,}477$

ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

СТЕПЕНИ

$$\log_a b^p = p\log_a b$$

$$\log_{a^k} b^p = \frac{p}{k}\log_a b$$

НОВОЕ ОСНОВАНИЕ

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

ПОЛЕЗНОЕ РАВЕНСТВО

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Оба числа равны c в степени $\log_c a \cdot \log_c b$

УРАВНЕНИЯ

$\log_a f = b \Leftrightarrow f = a^b$

$\log_a f = \log_a g \Leftrightarrow f = g > 0$

НЕРАВЕНСТВА

a > 1: $\log_a f > \log_a g \Leftrightarrow f > g > 0$

0 < a < 1: $\log_a f > \log_a g \Leftrightarrow 0 < f < g$

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ (НА ОДЗ)

$$\log_h f - \log_h g \ \sim\ (h-1)(f-g) \qquad \log_h f \ \sim\ (h-1)(f-1)$$

Знак «~» означает «имеют одинаковый знак». ОДЗ: $f > 0$, $g > 0$, $h > 0$, $h \neq 1$

СТЕПЕНИ, КОТОРЫЕ ПОЛЕЗНО УЗНАВАТЬ СРАЗУ

$2^5 = 32$ $2^6 = 64$ $2^7 = 128$ $2^8 = 256$ $2^9 = 512$ $2^{10} = 1024$ $3^4 = 81$ $3^5 = 243$ $3^6 = 729$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$ $7^3 = 343$

1 Степень с рациональным показателем

База · 8–9 класс

Логарифм отвечает на вопрос «в какую степень возвести?». Пока степени не считаются уверенно, логарифмы будут даваться тяжело, поэтому начинаем с них.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

$$a^0 = 1 \ (a \neq 0) \qquad a^{-1 \cdot n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ (a > 0)$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

Полезно помнить наизусть: степени двойки до $2^{10} = 1024$, тройки до $3^6 = 729$, пятёрки до $5^5 = 3125$.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× $2^{-3} = -8$. Отрицательный показатель даёт дробь: $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

× $3^2 \cdot 3^4 = 3^8$. При умножении показатели складываются: 3^6.

ПРИМЕР 1

Вычислите $8^{\frac{2}{3}}$.

$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.

Сначала извлекаем корень (знаменатель показателя), потом возводим в степень (числитель): так числа остаются маленькими.

ПРИМЕР 2

Решите уравнение $4^x = \frac{1}{8}$.

Приводим к основанию 2: $2^{2x} = 2^{-3}$.

Основания равны, значит равны показатели: $2x = -3$, $x = -1{,}5$.

Вычислите.

1.1 2^{-3} Ответ:

1.2 $(\frac{1}{3})^{-2}$ Ответ:

1.3 $16^{\frac{3}{4}}$ Ответ:

1.4 $27^{-\frac{2}{3}}$ Ответ:

1.5 $4^{1,5}$ Ответ:

1.6 $5^7 \cdot 5^{-5}$ Ответ:

1.7 $\frac{(2^3)^4}{2^{10}}$ Ответ:

1.8 $9^{0,5} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$ Ответ:

Решите уравнение.

1.9 $3^x = 81$ Ответ:

1.10 $25^x = 125$ Ответ:

2 Определение логарифма

База

Логарифм — это показатель степени. Запись $\log_2 8$ читается «логарифм восьми по основанию два» и означает число, в которое нужно возвести 2, чтобы получить 8. Ответ: 3.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Условия: $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

$\log_a 1 = 0$ $\quad$ $\log_a a = 1$ $\quad$ $\log_a a^c = c$

$\lg b = \log_{10} b$ — десятичный $\quad$ $\ln b = \log_e b$, $e \approx 2{,}718$ — натуральный

Алгоритм: представьте аргумент как степень основания. Тогда показатель этой степени и будет ответом.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× $\log_2(-8) = -3$. Логарифм отрицательного числа и нуля не существует: положительное основание в любой степени даёт положительное число.

× $\log_9 3 = 2$. Нужно спросить «9 в какой степени даёт 3?». Ответ: $\frac{1}{2}$, ведь $9^{\frac{1}{2}} = 3$.

ПРИМЕР 1

Вычислите $\log_{\frac{1}{3}} 9$.

Ищем c: $(\frac{1}{3})^c = 9$.

$(\frac{1}{3})^c = 3^{-c}$, а $9 = 3^2$, значит $-c = 2$, $c = -2$.

ПРИМЕР 2

Вычислите $\log_4 8$.

Оба числа — степени двойки: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$.

$(2^2)^c = 2^3 \Rightarrow 2c = 3 \Rightarrow c = 1{,}5$.

Вычислите.

2.1 $\log_2 16$ Ответ:

2.2 $\log_3 27$ Ответ:

2.3 $\log_5 \frac{1}{25}$ Ответ:

2.4 $\log_{\frac{1}{2}} 8$ Ответ:

2.5 $\lg 0{,}001$ Ответ:

2.6 $\log_7 1$ Ответ:

2.7 $\log_9 3$ Ответ:

2.8 $\log_8 4$ Ответ:

2.9 $\log_{\sqrt{2}} 8$ Ответ:

2.10 $\ln \frac{1}{e^2}$ Ответ:

3 Основное логарифмическое тождество

База

Если возвести основание в степень «логарифм по этому основанию», получится аргумент логарифма. Это прямое следствие определения.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

$$a^{\log_a b} = b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

Число в показателе перед логарифмом: $a^{k\cdot\log_a b} = (a^{\log_a b})^k = b^k$

Сумма в показателе: $a^{m\,+\,\log_a b} = a^m \cdot b$

Если основание степени и основание логарифма разные, сделайте их одинаковыми: $9 = 3^2$, $8 = 2^3$, $49 = 7^2$.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× $5^{2\log_5 3} = 2 \cdot 3 = 6$. Двойка из показателя становится степенью: $3^2 = 9$.

ПРИМЕР 1

Вычислите $4^{\log_2 3}$.

$4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$.

ПРИМЕР 2

Вычислите $3^{2\,+\,\log_3 5}$.

$3^{2\,+\,\log_3 5} = 3^2 \cdot 3^{\log_3 5} = 9 \cdot 5 = 45$.

- **Вычислите.**

3.1 $2^{\log_2 11}$ Ответ:

3.2 $10^{\lg 6}$ Ответ:

3.3 $e^{\ln 4}$ Ответ:

3.4 $7^{2\log_7 3}$ Ответ:

3.5 $9^{\log_3 5}$ Ответ:

3.6 $2^{3\,+\,\log_2 5}$ Ответ:

3.7 $5^{\log_5 12\,-\,1}$ Ответ:

3.8 $8^{\log_2 3}$ Ответ:

3.9 $49^{\log_7 2\,+\,0{,}5}$ Ответ:

3.10 $3^{\log_9 16}$ Ответ:

4 Логарифм произведения и частного

База

Сумма логарифмов с одинаковым основанием сворачивается в логарифм произведения, разность — в логарифм частного. Так из «некрасивых» чисел получаются точные ответы.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Формулы работают при $b > 0$, $c > 0$ и одинаковых основаниях. Для логарифма суммы $\log_a(b + c)$ формулы нет.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× $\log_2 12 - \log_2 3 = \dfrac{\log_2 12}{\log_2 3}$. Разность логарифмов превращается в логарифм частного: $\log_2 4 = 2$.

× $\log_3 4 + \log_5 2 = \log_{15} 8$. Складывать «напрямую» можно только при одинаковых основаниях.

ПРИМЕР 1

Вычислите $\log_6 4 + \log_6 9$.

$\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6(4 \cdot 9) = \log_6 36 = 2$.

ПРИМЕР 2

Вычислите $\log_2 40 - \log_2 5$.

$\log_2 40 - \log_2 5 = \log_2 \dfrac{40}{5} = \log_2 8 = 3$.

Вычислите.

4.1 $\log_6 2 + \log_6 3$ Ответ:

4.2 $\log_{15} 3 + \log_{15} 75$ Ответ:

4.3 $\log_3 54 - \log_3 2$ Ответ:

4.4 $\lg 5 + \lg 20$ Ответ:

4.5 $\log_2 48 - \log_2 3$ Ответ:

4.6 $\log_5 0{,}5 + \log_5 50$ Ответ:

4.7 $\log_4 10 - \log_4 5 + \log_4 32$ Ответ:

4.8 $\lg 8 + \lg 125$ Ответ:

4.9 $\log_3 18 + \log_3 4{,}5$ Ответ:

4.10 $\log_6 270 - \log_6 7{,}5$ Ответ:

5 Показатель степени в аргументе и основании

База → ЕГЭ

Показатель аргумента выносится вперёд множителем. Показатель основания тоже выносится, только в знаменатель. Работает и в обратную сторону: множитель перед логарифмом можно «внести» в аргумент.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

$$\log_a b^p = p\log_a b$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b \qquad \log_{a^k} b^p = \frac{p}{k}\log_a b$$

Корень — это степень: $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× $(\log_2 8)^2 = 2\log_2 8$. Выносится только показатель аргумента: $\log_2 8^2 = 6$, а $(\log_2 8)^2 = 9$.

ПРИМЕР 1

Вычислите $\log_{27} 9$.

$\log_{27} 9 = \log_{3^3} 3^2 = \frac{2}{3} \cdot \log_3 3 = \frac{2}{3}$.

ПРИМЕР 2

Вычислите $2\log_5 10 - \log_5 4$.

Вносим двойку: $2\log_5 10 = \log_5 100$.

$\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 25 = 2$.

Вычислите.

5.1 $\log_2 4^7$ Ответ:

5.2 $\log_9 27$ Ответ:

5.3 $3\log_6 2 + \log_6 27$ Ответ:

5.4 $2\lg 5 + \lg 4$ Ответ:

5.5 $\log_3 \sqrt[3]{9}$ Ответ:

5.6 $\log_{\frac{1}{4}} 32$ Ответ:

5.7 $\frac{1}{2}\log_2 36 - \log_2 3$ Ответ:

5.8 $\log_8 2^{12}$ Ответ:

5.9 $2\log_3 6 - \log_3 12$ Ответ:

5.10 $\log_{49} 16 + \log_7 12{,}25$ Ответ:

6 Переход к новому основанию

ЕГЭ · часть 1

Когда основания разные, переводим всё к одному удобному основанию. Отсюда же получаются «цепочки», где промежуточные числа сокращаются.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

Дробь $\frac{\log_c b}{\log_c a}$ — это частное логарифмов. Сокращать в ней «$\log_c$» нельзя: такой операции нет.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× $\frac{\log_3 8}{\log_3 2} = \log_3 4$. Частное логарифмов сворачивается по формуле перехода: $\log_2 8 = 3$.

ПРИМЕР 1

Вычислите $\log_2 3 \cdot \log_3 16$.

Цепочка: $\log_2 3 \cdot \log_3 16 = \log_2 16 = 4$.

ПРИМЕР 2

Вычислите $\frac{\log_7 3}{\log_{49} 3}$.

$\log_{49} 3 = \frac{1}{2}\log_7 3$, поэтому дробь равна $\frac{\log_7 3}{\frac{1}{2}\log_7 3} = 2$.

Вычислите.

6.1 $\frac{\log_5 27}{\log_5 3}$ Ответ:

6.2 $\frac{\lg 64}{\lg 8}$ Ответ:

6.3 $\log_2 5 \cdot \log_5 8$ Ответ:

6.4 $\log_3 7 \cdot \log_7 81$ Ответ:

6.5 $\frac{1}{\log_6 2} - \log_2 3$ Ответ:

6.6 $\log_9 5 \cdot \log_{25} 81$ Ответ:

6.7 $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 32$ Ответ:

6.8 $\frac{\log_5 7}{\log_{25} 7}$ Ответ:

6.9 $\log_5 2 \cdot \log_4 25$ Ответ:

6.10 $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6}$ Ответ:

7 Логарифмическая функция. ОДЗ и сравнение

База → ЕГЭ

График помогает понять, почему в неравенствах знак иногда переворачивается: при основании меньше 1 функция убывает.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

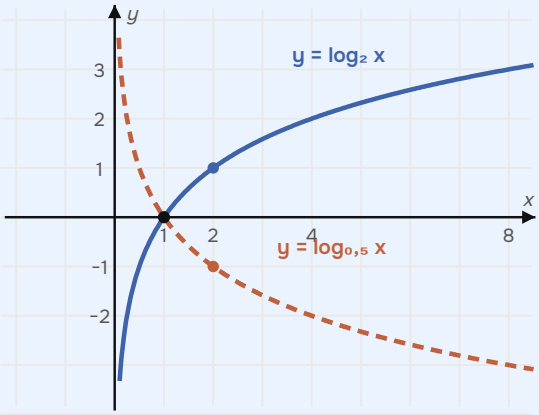
$y = \log_a x$: $D(y) = (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$

a > 1 — возрастает: больше аргумент, больше логарифм

0 < a < 1 — убывает: больше аргумент, меньше логарифм

График всегда проходит через (1; 0) и $(a; 1)$

Знак: $\log_a b > 0 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) > 0$



ОДЗ выражения с логарифмом: аргумент > 0; основание > 0 и ≠ 1; знаменатель ≠ 0.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× $\log_{0,5} 3 > \log_{0,5} 2$, «потому что 3 > 2». При основании 0,5 функция убывает, знак меняется: $\log_{0,5} 3 < \log_{0,5} 2$.

ПРИМЕР 1

Найдите область определения функции $y = \log_2(4 - x^2)$.

Аргумент положителен: $4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$.

Ответ: (-2; 2).

ПРИМЕР 2

Сравните $\log_3 10$ и 2.

Запишем 2 как логарифм: $2 = \log_3 9$. Основание 3 > 1, функция возрастает, 10 > 9.

Значит $\log_3 10 > 2$.

- **Найдите область определения функции.**

7.1 $y = \log_3(x - 4)$ Ответ:

7.2 $y = \lg(6 - 2x)$ Ответ:

7.3 $y = \log_2(x^2 - 9)$ Ответ:

7.4 $y = \log_{0,5} \dfrac{x - 1}{5 - x}$ Ответ:

7.5 $y = \log_{x-2}(10 - x)$ Ответ:

- **Поставьте знак >, < или =.**

7.6 $\log_3 7 \circ \log_3 5$ Ответ:

7.7 $\log_{0,3} 2 \circ \log_{0,3} 3$ Ответ:

7.8 $\log_2 10 \circ 3$ Ответ:

7.9 $\log_{\frac{1}{3}} 10 \circ -2$ Ответ:

7.10 $\log_2 3 \circ \log_3 2$ Ответ:

8 Вычисления в формате ЕГЭ

ЕГЭ · часть 1

В задании на вычисление значения выражения обычно сочетаются 2–3 свойства. Стратегия: привести к одному основанию, свернуть сумму и разность, применить тождество.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

1. Ищите общее основание: 4, 8, 16, 32 → 2; 9, 27, 81 → 3; 25, 125 → 5; 49 → 7.

2. Числа перед логарифмом вносите в аргумент, затем сворачивайте сумму и разность.

3. Степень с логарифмом в показателе — основное тождество.

4. Ответ ЕГЭ части 1 — целое число или конечная десятичная дробь. «Некрасивый» ответ — сигнал перепроверить.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× $\log_3(\log_2 512)$ вычисляют «снаружи». Порядок такой: сначала внутренний логарифм ($\log_2 512 = 9$), потом внешний ($\log_3 9 = 2$).

ПРИМЕР 1

Вычислите $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2}$.

$36^{\log_6 5} = (6^{\log_6 5})^2 = 25$; $10^{1-\lg 2} = \frac{10}{10^{\lg 2}} = \frac{10}{2} = 5$.

Ответ: 25 + 5 = 30.

ПРИМЕР 2

Найдите $\log_a(a^3 b)$, если $\log_a b = 4$.

$\log_a(a^3 b) = \log_a a^3 + \log_a b = 3 + 4 = 7$.

- **Найдите значение выражения.**

8.1 $\log_2 16 \cdot \log_6 36$ Ответ:

8.2 $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1{,}25$ Ответ:

8.3 $5^{3+\log_5 2}$ Ответ:

8.4 $\log_3(\log_2 512)$ Ответ:

8.5 $\frac{\lg 18 - \lg 2}{\lg 3}$ Ответ:

8.6 $7^{\log_{49} 64} - 3^{\log_9 4}$ Ответ:

8.7 $\log_2 56 + 2\log_2 12 - \log_2 63$ Ответ:

8.8 $10^{1+\lg 1{,}5} + 5^{-\log_5 4}$ Ответ:

8.9 $\log_a(a^2 b^3)$, если $\log_a b = -2$ Ответ:

8.10 $(\log_2 3 + \log_3 2)^2 - (\log_2 3)^2 - (\log_3 2)^2$ Ответ:

9 Простейшие логарифмические уравнения

ЕГЭ · часть 1

Уравнение решается переходом к степени или сравнением аргументов. Главный риск — посторонние корни, поэтому каждый корень проверяем на ОДЗ.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x),\ f(x) > 0$$

В первом случае ОДЗ выполняется автоматически: $a^b > 0$. Во втором проверяйте положительность аргумента. Если корней несколько, в ЕГЭ просят записать меньший или больший из них; здесь записывайте все.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$: получили $x = 4$ и $x = -2$, записали оба. Корень -2 обращает аргументы в отрицательные числа и отбрасывается.

ПРИМЕР 1

Решите уравнение $\log_2(x - 3) = 4$.

$x - 3 = 2^4 = 16 \Rightarrow x = 19$.

ПРИМЕР 2

Решите уравнение $\log_5(x^2 - 4x) = \log_5(2x - 5)$.

$x^2 - 4x = 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1$ или $x = 5$.

Проверка: при $x = 1$ аргумент $2x - 5 = -3 < 0$, корень посторонний. При $x = 5$: $5 > 0$. Ответ: 5.

Решите уравнение.

9.1 $\log_3(x + 2) = 2$ Ответ:

9.2 $\log_2(5 - x) = 3$ Ответ:

9.3 $\log_7(2x - 1) = 0$ Ответ:

9.4 $\log_{\frac{1}{2}}(4 - x) = -3$ Ответ:

9.5 $\log_2(x + 1) = \log_2(3x - 5)$ Ответ:

9.6 $\log_3(x^2 + 2x) = 1$ Ответ:

9.7 $\log_4(x^2 - 3x) = \log_4(2x - 4)$ Ответ:

9.8 $\log_x 49 = 2$ Ответ:

9.9 $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$ Ответ:

9.10 $\lg(x + 6) - \lg(x - 3) = \lg 4$ Ответ:

10 Уравнения: замена и сведение к одному основанию

ЕГЭ · часть 2

Сложные уравнения решаются тремя приёмами: замена $t = \log_a x$, переход к одному основанию и логарифмирование обеих частей.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

Замена. Если логарифм встречается в квадрате или в знаменателе, обозначьте $t = \log_a x$ и решите квадратное уравнение.

Одно основание. $\log_4 x = \frac{1}{2}\log_2 x$, $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$

Логарифмирование. Если x стоит и в основании, и в показателе ($x^{\lg x}$), возьмите логарифм от обеих частей.

Отбор корней на отрезке. Сравнивайте через степени: $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $2^{1,5} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× После замены нашли t и записали его в ответ. Ответ — это x: из $t = \log_2 x = 3$ следует $x = 8$.

ПРИМЕР 1

Решите уравнение $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$.

$t = \log_2 x$: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1$ или $t = 2$.

$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$; $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$. Ответ: 2; 4.

ПРИМЕР 2

Решите уравнение $x^{\lg x} = 100x$.

ОДЗ: $x > 0$. Логарифмируем: $\lg x \cdot \lg x = \lg 100 + \lg x$.

$t = \lg x$: $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ или $t = -1 \Rightarrow x = 100$ или $x = 0{,}1$.

Решите уравнение.

10.1 $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$ Ответ:

10.2 $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$ Ответ:

10.3 $\log_2^2 x + \log_2 x - 6 = 0$ Ответ:

10.4 $\log_3 x + \log_9 x = 3$ Ответ:

10.5 $\log_2(x + 1) + \log_2(x + 3) = 3$ Ответ:

10.6 $\log_2 x - 2\log_x 2 = 1$ Ответ:

10.7 $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2 5$ Ответ:

10.8 $x^{\log_2 x} = 16$ Ответ:

10.9 $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 10) = 2$ Ответ:

10.10 а) Решите уравнение $2\log_2^2 x - 5\log_2 x + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1; 3]$. Ответ:

11 Простейшие логарифмические неравенства

ЕГЭ · база части 2

Неравенство решается переходом к аргументам. Знак сохраняется при основании больше 1 и меняется при основании меньше 1. Вторая обязательная часть — ОДЗ.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

a > 1: $\log_a f > \log_a g \Leftrightarrow f > g > 0$

0 < a < 1: $\log_a f > \log_a g \Leftrightarrow 0 < f < g$

Число справа сначала превращаем в логарифм: $3 = \log_2 8$, $-1 = \log_{\frac{1}{3}} 3$. Ответ записываем промежутком; концы, где аргумент равен 0, всегда выколоты.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× $\log_2(x - 1) < 3 \Rightarrow x < 9$. Потеряна ОДЗ $x > 1$; верный ответ (1; 9).

ПРИМЕР 1

Решите неравенство $\log_2(x - 1) < 3$.

$0 < x - 1 < 8 \Rightarrow 1 < x < 9$. Ответ: (1; 9).

ПРИМЕР 2

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) > -1$.

$-1 = \log_{\frac{1}{3}} 3$. Основание меньше 1, знак меняется:

$0 < 2x + 1 < 3$.

$-0{,}5 < x < 1$. Ответ: (−0,5; 1).

Решите неравенство.

11.1 $\log_3 x > 2$ Ответ:

11.2 $\log_2(x - 3) < 1$ Ответ:

11.3 $\lg(x + 1) \le 1$ Ответ:

11.4 $\log_{0,5} x > -2$ Ответ:

11.5 $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) \ge -1$ Ответ:

11.6 $\log_4(2x - 1) \ge 0{,}5$ Ответ:

11.7 $\log_5(x + 2) \le \log_5(7 - x)$ Ответ:

11.8 $\log_{0,2}(3x - 1) < \log_{0,2}(x + 3)$ Ответ:

11.9 $\log_2(x^2 - 1) < 3$ Ответ:

11.10 $\log_3(x^2 - 2x) \ge 1$ Ответ:

12 Неравенства: замена и метод рационализации

ЕГЭ · часть 2

Когда в неравенстве квадрат логарифма, дробь или переменное основание, используем замену или метод рационализации: разность логарифмов заменяется выражением того же знака.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

На ОДЗ: $\log_h f - \log_h g$ имеет тот же знак, что $(h-1)(f-g)$

Алгоритм. 1) Выписать ОДЗ: $f>0$, $g>0$, $h>0$, $h\neq 1$. 2) Записать правую часть как логарифм с тем же основанием. 3) Заменить разность логарифмов произведением. 4) Решить методом интервалов и пересечь с ОДЗ.

Замена $t=\log_a x$: решаем неравенство относительно t, затем каждое условие на t переводим в условие на x.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× Решили квадратное неравенство относительно t и забыли вернуться к x. При основании больше 1 из $1\le\log_2 x\le 2$ получается $2\le x\le 4$.

ПРИМЕР 1

Решите неравенство $\log_2^2 x-3\log_2 x+2\le 0$.

$t^2-3t+2\le 0\Rightarrow 1\le t\le 2\Rightarrow 1\le\log_2 x\le 2\Rightarrow 2\le x\le 4$.
Ответ: $[2;4]$.

ПРИМЕР 2

Решите неравенство $\log_x(x+2)>2$.

ОДЗ: $x>0$, $x\neq 1$. $2=\log_x x^2$.

Рационализация: $(x-1)(x+2-x^2)>0\Leftrightarrow$
$(x-1)(x-2)(x+1)<0$.

Метод интервалов с учётом $x>0$: $1<x<2$. Ответ: $(1;2)$.

Решите неравенство.

12.1 $\lg^2 x-\lg x-2<0$ Ответ:

12.2 $\log_3^2 x-4\log_3 x+3\ge 0$ Ответ:

12.3 $\log_2 x+\log_2(x-3)\le 2$ Ответ:

12.4 $\log_{0,5}(x+1)+\log_{0,5}(x-1)\ge -3$ Ответ:

12.5 $\log_2(x+2)\le\log_2(x^2+2)$ Ответ:

12.6 $\log_2(x-1)+\log_2(5-x)\ge\log_2 3$ Ответ:

12.7 $\dfrac{\log_2 x-2}{\log_2 x+1}\ge 0$ Ответ:

12.8 $x^{\log_3 x}>81$ Ответ:

12.9 $\log_x(2x+3)\le 2$ Ответ:

12.10 $\log_{x+1}(5-x)\ge 1$ Ответ:

13 Задачи с прикладным содержанием

ЕГЭ · часть 1

В задачах «с формулой» логарифм описывает громкость, кислотность, распад и рост. Нужно подставить известные величины и решить простейшее уравнение.

ТЕОРИЯ И ФОРМУЛЫ

План. 1) Выписать, что известно и что найти. 2) Подставить в формулу. 3) Изолировать логарифм или степень. 4) Перейти к степени. 5) Проверить единицы измерения.

$$\lg A - \lg B = k \Leftrightarrow \frac{A}{B} = 10^k$$ — так находят «во сколько раз».

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ

× Громкость выросла на 30 дБ, и делается вывод «интенсивность выросла в 30 раз». Каждые 10 дБ — это умножение на 10, поэтому 30 дБ дают рост в $10^3 = 1000$ раз.

ПРИМЕР 1

Масса изотопа меняется по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, $m_0 = 64$ мг, $T = 5$ мин. Через сколько минут останется 4 мг?

$64 \cdot 2^{-\frac{t}{5}} = 4 \Rightarrow 2^{-\frac{t}{5}} = \frac{1}{16} = 2^{-4} \Rightarrow t = 20$ мин.

- **Решите задачу.**

13.1 Громкость звука $L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$ дБ. Громкость выросла с 40 до 70 дБ. Во сколько раз увеличилась интенсивность I?

Ответ:

13.2 Кислотность раствора $\text{pH} = -\lg c$, где c — концентрация ионов водорода (моль/л). Найдите pH раствора при $c = 0{,}0001$.

Ответ:

13.3 Масса радиоактивного вещества $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, $m_0 = 40$ мг, период полураспада $T = 10$ мин. Через сколько минут масса станет 5 мг?

Ответ:

13.4 Число бактерий $N(t) = N_0 \cdot 3^{\frac{t}{20}}$ (t в минутах). Через сколько минут число бактерий увеличится в 81 раз?

Ответ:

13.5 При изотермическом сжатии газа совершается работа $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ Дж, где $\alpha = 12{,}5$, $\nu = 2$ моль, $T = 400$ К, $V_1 = 64$ л. До какого объёма V_2 (в литрах) сжали газ, если совершена работа 40 000 Дж?

Ответ:

13.6 Энергия землетрясения E и его магнитуда M связаны формулой $M = \frac{2}{3} \lg \frac{E}{E_0}$. Во сколько раз энергия землетрясения магнитудой 7 больше энергии землетрясения магнитудой 5?

Ответ:

Задачи со звёздочкой

Олимпиадный уровень

Здесь нет новой теории: нужно увидеть, какое из известных свойств сработает. Если не получается сразу, вернитесь к разделам 3, 6 и 7.

★1 Вычислите $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{31} 32$.

Ответ:

★2 Решите уравнение $x^{\log_3 2} + 2^{\log_3 x} = 8$.

Подсказка: сравните оба слагаемых, прологарифмировав их по основанию 3.

Ответ:

★3 Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 5$? Калькулятором не пользуйтесь.

Подсказка: сравните каждое число с 1,5.

Ответ:

Ответы

Дроби записаны в несократимом виде. В уравнениях указаны все корни, в неравенствах — промежутки.

1. Степень с рациональным показателем			
1	$\frac{1}{8}$	6	25
2	9	7	4
3	8	8	12
4	$\frac{1}{9}$	9	4
5	8	10	1,5

2. Определение логарифма			
1	4	6	0
2	3	7	0,5
3	-2	8	$\frac{2}{3}$
4	-3	9	6
5	-3	10	-2

3. Основное логарифмическое тождество			
1	11	6	40
2	6	7	2,4
3	4	8	27
4	9	9	28
5	25	10	4

4. Логарифм произведения и частного			
1	1	6	2
2	2	7	3
3	3	8	3
4	2	9	4
5	4	10	2

5. Показатель степени в аргументе и основании			
1	14	6	-2,5
2	1,5	7	1
3	3	8	4
4	2	9	1
5	$\frac{2}{3}$	10	2

6. Переход к новому основанию

1	3	6	1
2	2	7	5
3	3	8	2
4	4	9	1
5	1	10	1

7. Логарифмическая функция. ОДЗ и сравнение

1	$(4; +\infty)$	6	$\log_3 7 > \log_3 5$
2	$(-\infty; 3)$	7	$\log_{0,3} 2 > \log_{0,3} 3$
3	$(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$	8	$\log_2 10 > 3$
4	$(1; 5)$	9	$\log_{\frac{1}{3}} 10 < -2$
5	$(2; 3) \cup (3; 10)$	10	$\log_2 3 > \log_3 2$

8. Вычисления в формате ЕГЭ

1	8	6	6
2	-1	7	7
3	250	8	15,25
4	2	9	-4
5	2	10	2

9. Простейшие логарифмические уравнения

1	7	6	-3; 1
2	-3	7	4
3	1	8	7
4	-4	9	4
5	3	10	6

10. Уравнения: замена и сведение к одному основанию

1	$\frac{1}{3}$; 27	6	0,5; 4
2	10; 100	7	0; 2
3	$\frac{1}{8}$; 4	8	0,25; 4
4	9	9	3
5	1	10	а) 4; $\sqrt{2}$ б) $\sqrt{2}$

11. Простейшие логарифмические неравенства

1	$(9; +\infty)$	6	$[1{,}5; +\infty)$
2	$(3; 5)$	7	$(-2; 2{,}5]$
3	$(-1; 9]$	8	$(2; +\infty)$
4	$(0; 4)$	9	$(-3; -1) \cup (1; 3)$
5	$(2; 5]$	10	$(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

12. Неравенства: замена и метод рационализации

1	$(0{,}1; 100)$	6	$[2; 4]$
2	$(0; 3] \cup [27; +\infty)$	7	$(0; 0{,}5) \cup [4; +\infty)$
3	$(3; 4]$	8	$(0; \frac{1}{9}) \cup (9; +\infty)$
4	$(1; 3]$	9	$(0; 1) \cup [3; +\infty)$
5	$(-2; 0] \cup [1; +\infty)$	10	$(0; 2]$

13. Задачи с прикладным содержанием

1	1000 раз	4	80 мин
2	4	5	4 л
3	30 мин	6	1000 раз

★ Задачи со звёздочкой

1	5	3	$\log_2 3 > \log_3 5$
2	9		