ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ · АЛГЕБРА

Корни n-й степени

с повторением степеней и квадратного корня
от 7 класса до уровня выше ЕГЭ, часть 1

17 разделов + ★ | **378** заданий | **35** разобранных примеров | ответы и решения в конце

Ученик _____ Класс _____ Начало _____

ЧАСТЬ 1 · 7–8 КЛАСС

Повторение: степени и квадратный корень

§1 Натуральная степень
§2 Свойства степеней
§3 Целый показатель
§4 Квадратный корень
§5 Свойства √

ЧАСТЬ 2 · 9–10 КЛАСС

Корень n-й степени

§6 Определение корня
§7 Уравнение $x^n = a$
§8 Свойства корней
§9 Корень из степени
§10 Вынесение и сравнение
§11 Корень в знаменателе

ЧАСТЬ 3 · 10–11 КЛАСС

Степень с рациональным показателем

§12 Рациональный показатель
§13 Свойства дробных степеней
§14 Функция $y = \sqrt[n]{x}$
§15 Уравнения с корнями

ЧАСТЬ 4 · 10–11 КЛАСС

ЕГЭ и выше

§16 Тренажёр ЕГЭ
§17 Выше ЕГЭ
★ Олимпиадные

Как работать с тетрадью

1. Прочитайте «Зачем» и правило раздела. Разберите примеры: закройте решение и попробуйте сами.
2. Решайте задания по порядку уровней. Номер задания — ссылка на ответ (в PDF по нему можно нажать).
3. Проверьте ответы в конце тетради и запишите «Итог раздела».
4. Если верно меньше 70 % — вернитесь к правилу и примерам, затем повторите задания с ошибками.

Уровни

- • базовый — одно правило
- •• средний — два шага или ловушка
- ••• высокий — комбинация приёмов
- ЕГЭ формат ЕГЭ — ответ целое или десятичная дробь
- ★ олимпиадный

Маршруты

7 класс: степени
§1–§2
Натуральный показатель, свойства степеней.

8 класс / ОГЭ
§1–§5
Степени с целым показателем и квадратный корень.

Тема «Корень n-й степени» с нуля
§6–§11 (● и ●●)
Сначала повторите §3 и §5, если там есть ошибки.

10 класс, вся тема
§6–§15
Плюс ●●● в каждом разделе.

ЕГЭ, часть 1
справочник, §8, §9, §12, §13, §15, §16
Цель — 18 из 20 в тренажёре за 60 мин.

Выше ЕГЭ
●●● в §8–§15, §17, ★
Ключевые шаги к §17 и ★ — в конце.

Содержание и таблица прогресса

	Раздел	Класс	Мин	Стр.	Верно
Часть 1. Повторение: степени и квадратный корень · 7–8 класс					
§1	Степень с натуральным показателем	7 кл.	25	4	___ / 22
§2	Свойства степеней	7 кл.	30	6	___ / 20
§3	Степень с целым показателем	8 кл.	30	8	___ / 24
§4	Квадратный корень	8 кл.	25	10	___ / 21
§5	Свойства квадратного корня	8 кл.	40	12	___ / 33
Часть 2. Корень n-й степени · 9–10 класс					
§6	Корень n-й степени: определение	9–10 кл.	35	14	___ / 27
§7	Уравнение $x^n = a$	9–10 кл.	25	16	___ / 16
§8	Свойства корней n-й степени	10 кл.	45	18	___ / 28
§9	Корень из степени: модуль и буквы	10 кл.	30	21	___ / 18
§10	Вынесение множителя, подобные корни, сравнение	10 кл.	40	23	___ / 26
§11	Корень в знаменателе и дроби с корнями	10 кл.	35	25	___ / 16
Часть 3. Степень с рациональным показателем · 10–11 класс					
§12	Степень с рациональным показателем	10 кл.	35	27	___ / 27
§13	Свойства степени с рациональным показателем	10 кл.	40	29	___ / 26
§14	Функция $y = \sqrt[n]{x}$: область определения, оценка, сравнение	10 кл.	30	31	___ / 18
§15	Простейшие уравнения с корнями и степенями	10–11 кл.	35	33	___ / 17
Часть 4. ЕГЭ и выше · 10–11 класс					
§16	Тренажёр ЕГЭ, часть 1	ЕГЭ	60	35	___ / 20
§17	Выше уровня ЕГЭ части 1	10–11 кл.	70	37	___ / 14
★	Олимпиадные задачи	★	60	39	___ / 5
Ответы — стр. 40 · Ключевые шаги к §17 и ★ — стр. 43					

Справочник

Степени (§1–§3)

$a^m a^n = a^{m+n} \quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad a^0 = 1 \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Квадратный корень (§4–§5)

$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0,\ b^2 = a$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt{a^2} = |a| \quad (\sqrt{a})^2 = a$

Корень n-й степени (§6)

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

n чётное: $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} \geq 0$

n нечётное: a любое, $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

Уравнение $x^n = a$ (§7)

n нечётное: $x = \sqrt[n]{a}$

n чётное: $a > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[n]{a}$; $a = 0 \Rightarrow x = 0$; $a < 0$ — нет корней

Свойства корней (§8)

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \quad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k} \quad \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

Корень из степени (§9)

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ (n чётное)

$\sqrt[n]{a^n} = a$ (n нечётное)

$\sqrt[n]{a^n b} = |a|\sqrt[n]{b}$ (n чётное)

Рациональный показатель (§12–§13)

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a > 0$

$a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad a^{0,5} = \sqrt{a}$

свойства — как у целых степеней

Формулы сокращённого умножения (§11)

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Таблица степеней

n	2^n	3^n	4^n	5^n	6^n	7^n
2	4	9	16	25	36	49
3	8	27	64	125	216	343
4	16	81	256	625	1296	2401
5	32	243	1024	3125	7776	16807
6	64	729	4096	15625	46656	117649
7	128	2187				
8	256	6561				
9	512					
10	1024					

Квадраты 11–25

11	12	13	14	15	16	17	18
121	144	169	196	225	256	289	324
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	
361	400	441	484	529	576	625	

Кубы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Полезно помнить

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, $\sqrt{5} \approx 2{,}24$, $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$, $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$

§1 Степень с натуральным показателем

7 кл. · ≈ 25 мин · 22 заданий

Зачем. Всё, что дальше будет с корнями, держится на степенях: корень — это действие, обратное возведению в степень. Ошибка в знаке степени здесь превращается в ошибку в каждом следующем разделе.

Определение

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \qquad a^1 = a$$

a — **основание**, n — **показатель**. Пример: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Знак степени

Положительное число в любой степени положительно.

Отрицательное число: в **чётной** степени — плюс, в **нечётной** — минус.

$(-2)^4 = 16, \quad (-2)^3 = -8, \quad (-1)^{2027} = -1.$

Где стоит минус

-3^2 — сначала степень, потом минус: $-3^2 = -9$.

$(-3)^2$ — в квадрат возводят всё в скобках: $(-3)^2 = 9$.

Дробь возводят целиком: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

Откуда правило

Почему у отрицательного числа знак зависит от чётности? Минусы в произведении собираются парами: $(-2)(-2) = 4$. Если множителей чётное число, все минусы разбиваются на пары и пропадают. Если нечётное — один минус остаётся без пары.

Типичные ошибки

× $2^3 = 6$	✓ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ — показатель считает множители, умножать на него нельзя
× $-3^2 = 9$	✓ $-3^2 = -9$; без скобок минус в степень не входит
× $(-2)^3 = 8$	✓ $(-2)^3 = -8$: нечётная степень сохраняет знак

Пример 1

Вычислите $(-2)^5$, -2^4 и $(-1)^{100}$.

Решение. $(-2)^5 = -32$ (5 — нечётное, минус остаётся); $-2^4 = -16$ (минус стоит перед степенью); $(-1)^{100} = 1$ (100 — чётное).

Пример 2

Вычислите $3 \cdot 2^3 - (-3)^2$.

Решение. Порядок: степени, потом умножение, потом вычитание. $2^3 = 8$ и $(-3)^2 = 9$, поэтому $3 \cdot 8 - 9 = 24 - 9 = 15$.

Задания

- **Вычислите**

1.1 2^5	1.2 3^4	1.3 10^6	1.4 $0{,}2^3$
1.5 $(-3)^3$	1.6 $(-2)^4$	1.7 -2^4	1.8 $(-1)^{15}$

- **Определите знак, не вычисляя**

1.9 $(-7)^{13}$	1.10 $(-0{,}5)^{10}$	1.11 $-(-2)^6$	1.12 $-(-3)^5$

- **Вычислите**

1.13 $\left(\frac{2}{3}\right)^3$	1.14 $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$	1.15 $1{,}5^2$
1.16 $(-0{,}1)^4$	1.17 $5 \cdot 2^3 - 3^3$	1.18 $(-2)^3 + (-3)^2$

- **Вычислите**

1.19 $\frac{2^6 - 4^3 + 1}{(-1)^7}$	1.20 $-3^2 \cdot (-2)^3$	1.21 $\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \frac{16}{9}$	1.22 $0{,}5^3 \cdot 4^2 + (-1)^{100}$

Итог раздела: верно _____ из 22

§2 Свойства степеней

7 кл. · ≈ 30 мин · 20 заданий

Зачем. Свойства степеней — главный инструмент для корней: через полгода каждое свойство корней окажется этим же свойством, записанным с дробным показателем.

Одинаковые основания

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Одинаковые показатели

$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$a^0 = 1$ при $a \neq 0$.

Приём «одно основание»

Числа $4, 8, 16, 32$ — степени двойки, $9, 27, 81$ — тройки, $25, 125$ — пятёрки. Запишите всё через одно основание и складывайте показатели.

$$\frac{4^3 \cdot 8}{2^7} = \frac{2^6 \cdot 2^3}{2^7} = 2^2 = 4$$

Откуда правило

$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^5$: множители просто встают в одну строку, их количество складывается.
$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6$ — сложение одинаковых чисел и есть умножение.

Типичные ошибки

× $a^2 \cdot a^3 = a^6$	✓ $a^2 \cdot a^3 = a^5$: при умножении показатели складывают
× $(a^3)^2 = a^9$	✓ $(a^3)^2 = a^6$: степень степени — показатели перемножают
× $2^3 \cdot 3^3 = 6^9$	✓ $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$: перемножаются основания, показатель тот же
× $a^5 + a^5 = a^{10}$	✓ $a^5 + a^5 = 2a^5$: для суммы свойств степеней нет

Пример 1

Вычислите $\dfrac{25^3 \cdot 4^4}{10^6}$.

Решение. $25^3 = 5^6$, $4^4 = 2^8$, $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$. Получаем $\dfrac{5^6 \cdot 2^8}{2^6 \cdot 5^6} = 2^2 = 4$.

Пример 2

Упростите $\dfrac{(a^3)^4 \cdot a^2}{a^{10}}$.

Решение. $(a^3)^4 = a^{12}$; $a^{12} \cdot a^2 = a^{14}$; $a^{14} : a^{10} = a^4$.

Задания

• Представьте в виде степени

2.1 $a^3 \cdot a^5$	2.2 $a^{12} : a^4$	2.3 $(a^3)^4$
2.4 $a \cdot a^6 \cdot a^2$	2.5 $(a^2)^3 \cdot a$	2.6 $\dfrac{a^{10}}{a^3 \cdot a^2}$

•• Вычислите удобным способом

2.7 $\dfrac{2^{12}}{2^9}$	2.8 $\dfrac{3^5 \cdot 3^4}{3^7}$	2.9 $\dfrac{(5^3)^2}{5^4}$
2.10 $0{,}25^5 \cdot 4^5$	2.11 $\dfrac{6^8}{2^8 \cdot 3^6}$	2.12 $\dfrac{10^7}{2^5 \cdot 5^6}$

••• Сведите к одному основанию и вычислите

2.13 $\dfrac{4^5 \cdot 8^3}{2^{17}}$	2.14 $\dfrac{27^4 \cdot 9^3}{3^{16}}$	2.15 $\dfrac{125^2 \cdot 25^3}{5^{11}}$
2.16 $\dfrac{12^5}{2^9 \cdot 3^4}$	2.17 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^5$	2.18 $\dfrac{2^{10} + 2^9}{2^8}$

••• Упростите

2.19 $\dfrac{(a^2b^3)^4}{a^6b^{10}}$	2.20 $\dfrac{(2a^3)^3}{4a^7}$

Итог раздела: верно _____ из 20

§3 Степень с целым показателем

8 кл. · ≈ 30 мин · 24 заданий

Зачем. Отрицательные показатели появятся в каждой второй задаче ЕГЭ на степени: $16^{-0{,}75}$, $a^{-\frac{1}{2}}$. Минус в показателе означает «перевернуть», а знак числа он не меняет.

Определение

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

$2^{-3} = \frac{1}{8},\ 10^{-2} = 0{,}01.$

Дробь в отрицательной степени

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \frac{25}{4}.$

Свойства те же

Все пять свойств из §2 работают для любых целых показателей:

$3^{-4} \cdot 3^{7} = 3^{3},\ \frac{2^{-5}}{2^{-8}} = 2^{-5-(-8)} = 2^{3}.$

Стандартный вид: $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$.

Откуда правило

Посмотрите на ряд $2^3 = 8,\ 2^2 = 4,\ 2^1 = 2$. Каждый шаг влево по показателю — деление на 2. Продолжим: $2^0 = 1, 2^{-1} = \frac{1}{2}, 2^{-2} = \frac{1}{4}$. Определение выбрано так, чтобы правило $a^m : a^n = a^{m-n}$ работало всегда: $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$ и $a^{2-5} = a^{-3}$.

Типичные ошибки

× $2^{-3} = -8$	✓ $2^{-3} = \frac{1}{8}$: минус в показателе — это «единица делить на»
× $5^0 = 0$	✓ $5^0 = 1$
× $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = -\frac{4}{9}$	✓ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$: дробь переворачивается, знак не меняется
× $3a^{-2} = \frac{1}{3a^2}$	✓ $3a^{-2} = \frac{3}{a^2}$: показатель относится только к a

Пример 1

Вычислите $2^{-3} + 4^{-1}$.

Решение. $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$.

Пример 2

Вычислите $\frac{9^{-3} \cdot 27^2}{3^{-1}}$.

Решение. Одно основание: $9^{-3} = 3^{-6}$, $27^2 = 3^6$. Числитель $3^{-6+6} = 3^0$; делим на 3^{-1}: $3^{0-(-1)} = 3^1 = 3$.

Пример 3

Вычислите $4{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5$.

Решение. $4{,}5 \cdot 2 = 9$, $10^{-3} \cdot 10^5 = 10^2$. Ответ: $9 \cdot 10^2 = 900$.

Задания

• Вычислите

3.1 2^{-3}	3.2 10^{-2}	3.3 7^{0}	3.4 $(-3)^{-2}$
3.5 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$	3.6 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$	3.7 $0{,}5^{-3}$	3.8 $(-2)^{-3}$

•• Вычислите

3.9 $5^{-6}\cdot 5^{8}$	3.10 $\frac{2^{-5}}{2^{-8}}$	3.11 $(3^{-2})^{-2}$	3.12 $4^{-1}+2^{-2}$
3.13 $2^{-1}-3^{-1}$	3.14 $\frac{6^{-3}\cdot 6^{5}}{6^{0}}$	3.15 $10^{-3}\cdot 10^{5}:10^{-1}$	3.16 $(0{,}2)^{-2}+(-5)^{0}$

••• Вычислите

3.17 $\frac{4^{-5}\cdot 16^{2}}{8^{-3}}$	3.18 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$	3.19 $1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 4\cdot 10^{5}$
3.20 $\frac{3{,}6\cdot 10^{4}}{1{,}2\cdot 10^{-2}}$	3.21 $\left(2^{-2}+2^{-3}\right)^{-1}$	3.22 $\frac{9^{-3}\cdot 27^{2}}{3^{-1}}$

••• Упростите

3.23 $\frac{a^{-3}\cdot a^{5}}{a^{-4}}$	3.24 $\left(a^{-2}b\right)^{-3}\cdot a^{-5}b^{4}$

Итог раздела: верно _____ из 24

§4 Квадратный корень

8 кл. · ≈ 25 мин · 21 заданий

Зачем. Квадратный корень — частный случай корня n-й степени при $n = 2$. Всё, что вы знаете про $\sqrt{a}$, перенесётся на $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ почти без изменений.

Определение

Арифметический квадратный корень из $a \geq 0$ — неотрицательное число, квадрат которого равен a.

$$\sqrt{a} = b \iff b \geq 0 \text{ и } b^2 = a$$

$\sqrt{49} = 7$, потому что $7 \geq 0$ и $7^2 = 49$.

Что следует

$\sqrt{a} \geq 0$ всегда; $\sqrt{-9}$ — не имеет смысла.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad (a \geq 0)$$

$\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$, $\sqrt{\dfrac{25}{144}} = \dfrac{5}{12}$.

Уравнение $x^2 = a$

$a > 0$: два корня $x = \pm\sqrt{a}$.

$a = 0$: один корень $x = 0$.

$a < 0$: корней нет.

$x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$.

Откуда правило

Чисел, квадрат которых равен 16, два: 4 и -4. Чтобы запись $\sqrt{16}$ означала одно число, договорились брать неотрицательное. Поэтому $\sqrt{16} = 4$, а у уравнения $x^2 = 16$ два корня: $\sqrt{16}$ и $-\sqrt{16}$.

Типичные ошибки

× $\sqrt{16} = \pm 4$	✓ $\sqrt{16} = 4$; «$\pm$» появляется только при решении уравнения $x^2 = 16$
× $\sqrt{9 + 16} = 3 + 4$	✓ $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$: корень из суммы по слагаемым не раскладывается
× $\sqrt{0{,}9} = 0{,}3$	✓ $0{,}3^2 = 0{,}09$, поэтому $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$; а $\sqrt{0{,}9}$ — иррациональное число

Пример 1

Вычислите $3\sqrt{16} - 10\sqrt{0{,}36}$.

Решение. $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$. $3 \cdot 4 - 10 \cdot 0{,}6 = 12 - 6 = 6$.

Пример 2

Решите уравнения $x^2 = 7$ и $x^2 = -4$.

Решение. $x^2 = 7$: $x = \pm\sqrt{7}$. $x^2 = -4$: квадрат не бывает отрицательным — корней нет.

Задания

• **Вычислите**

4.1 $\sqrt{81}$	4.2 $\sqrt{0{,}64}$	4.3 $\sqrt{\frac{9}{49}}$	4.4 $\sqrt{1{,}44}$
4.5 $\sqrt{900}$	4.6 $\left(\sqrt{7}\right)^2$	4.7 $\sqrt{0{,}0004}$	4.8 $\sqrt{169}$

•• **Вычислите**

4.9 $2\sqrt{25}-10\sqrt{0{,}81}$	4.10 $\sqrt{0{,}25}\cdot\sqrt{196}$	4.11 $\left(-2\sqrt{3}\right)^2$
4.12 $\sqrt{3^2+4^2}$	4.13 $\sqrt{13^2-12^2}$	4.14 $\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{0{,}01}}$

•• **Решите уравнение**

4.15 $x^2=49$	4.16 $x^2=0{,}09$	4.17 $x^2=-16$	4.18 $x^2=11$

••• **Вычислите**

4.19 $\sqrt{(-5)^2}$	4.20 $4\sqrt{6{,}25}-(\sqrt{3})^2$	4.21 $\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}$

Итог раздела: верно _____ из 21

§5 Свойства квадратного корня

8 кл. · ≈ 40 мин · 33 заданий

Зачем. Те же действия — разложить под корнем, вынести множитель, избавиться от корня в знаменателе — дальше придётся делать с кубическими корнями. Здесь их проще всего отработать.

Произведение и частное

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0,\ b > 0)$$

$\sqrt{18}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{36} = 6.$

Корень из квадрата

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$\sqrt{(-5)^2} = 5$; при $a < 0$: $\sqrt{a^2} = -a.$

$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$, так как $2 - \sqrt{5} < 0.$

Вынесение и внесение

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b} \quad (a \geq 0)$$

$\sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = 5\sqrt{2};\ 3\sqrt{2} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{18}.$

Корень в знаменателе

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{4} = \sqrt{5}+1.$$

Работает разность квадратов:
$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a - b.$

Откуда правило

Почему $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$? Число $\sqrt{a}\sqrt{b}$ неотрицательно, а его квадрат $(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$. По определению это и есть $\sqrt{ab}$. Почему $\sqrt{a^2} = |a|$? Корень обязан быть неотрицательным, а a может оказаться отрицательным; из чисел a и $-a$ подходит то, которое ≥ 0, то есть $|a|$.

Типичные ошибки

× $\sqrt{a^2} = a$ при любом a	✓ $\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$; при $a < 0$ ответ $-a$
× $2\sqrt{3} = \sqrt{6}$	✓ $2\sqrt{3} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{12}$: вносим квадрат множителя
× $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{26}$	✓ $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$: складывают подобные корни

Пример 1

Упростите $3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32}$.

Решение. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Пример 2

Вычислите $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{5}$.

Решение. $\sqrt{5} \approx 2{,}24 > 2$, значит $2 - \sqrt{5} < 0$ и $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$. Сумма: $2\sqrt{5} - 2$.

Задания

• Вычислите

5.1 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$	5.2 $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$	5.3 $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$	5.4 $\sqrt{16\cdot 0{,}49}$
5.5 $\sqrt{2^4\cdot 5^2}$	5.6 $\sqrt{3^6}$	5.7 $\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}}{\sqrt{4}}$	5.8 $\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}$

•• Вынесите множитель из-под корня

5.9 $\sqrt{12}$	5.10 $\sqrt{50}$	5.11 $\sqrt{108}$	5.12 $\sqrt{180}$

•• Внесите множитель под корень

5.13 $3\sqrt{2}$	5.14 $5\sqrt{3}$	5.15 $\frac{1}{2}\sqrt{12}$	5.16 $-2\sqrt{7}$

•• Упростите

5.17 $\sqrt{8}+\sqrt{18}$	5.18 $\sqrt{75}-\sqrt{27}$	5.19 $2\sqrt{12}-\sqrt{48}+\sqrt{3}$
5.20 $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$	5.21 $(\sqrt{3}+1)^2$	5.22 $(2-\sqrt{3})^2+4\sqrt{3}$

•• Упростите при указанном условии

5.23 $\sqrt{a^2}$ при $a<0$	5.24 $\sqrt{9a^2}$ при $a<0$	5.25 $\sqrt{a^4}$
5.26 $\sqrt{a^6}$ при $a<0$	5.27 $\sqrt{(a-3)^2}$ при $a<3$	

••• Вычислите

5.28 $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$	5.29 $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$	5.30 $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$
5.31 $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\sqrt{3}$	5.32 $\dfrac{(\sqrt{12}+\sqrt{3})^2}{9}$	5.33 $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}-\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}$

Итог раздела: верно _____ из 33

§6 Корень n-й степени: определение

9–10 кл. · ≈ 35 мин · 27 заданий

Зачем. Квадратный корень отвечает на вопрос «какое число в квадрате даёт a». Корень n-й степени отвечает на тот же вопрос для куба, четвёртой, пятой степени. На этом определении стоят все следующие разделы.

Определение

Корень n-й степени из a ($n \geq 2$) — число, n-я степень которого равна a.

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

n — показатель корня, a — подкоренное выражение. $\sqrt[3]{-8} = -2$, потому что $(-2)^3 = -8$.

Чётное n: 2, 4, 6, ...

Подкоренное $a \geq 0$, значение корня ≥ 0 (**арифметический** корень).

$\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[4]{-16}$ — не имеет смысла.

Нечётное n: 3, 5, 7, ...

Подкоренное — любое число. Знак корня совпадает со знаком a:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

$\sqrt[5]{-32} = -2$.

Обратные действия

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

(при чётном n — для $a \geq 0$). $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5 = 7$, $\left(\sqrt[4]{3}\right)^4 = 3$.

Откуда правило

Нечётная степень сохраняет знак: $(-2)^3 = -8$. Поэтому для любого числа найдётся ровно одно число, куб которого ему равен, — даже для отрицательного. Чётная степень любого числа неотрицательна: $x^4 \geq 0$. Значит, число, четвёртая степень которого равна -16, не существует, и $\sqrt[4]{-16}$ не имеет смысла. При $a > 0$ подходят два числа ($3^4 = (-3)^4 = 81$), и, как у квадратного корня, договорились брать неотрицательное.

Типичные ошибки

× $\sqrt[3]{-8}$ не существует	✓ $\sqrt[3]{-8} = -2$: из отрицательных чисел нельзя извлекать только корни чётной степени
× $\sqrt[4]{16} = \pm 2$	✓ $\sqrt[4]{16} = 2$; корень чётной степени — неотрицательное число
× $\sqrt[3]{27} = 9$	✓ $9^3 = 729$. Проверяйте возведением: $3^3 = 27$, значит $\sqrt[3]{27} = 3$
× $\sqrt[4]{-16} = -2$	✓ $(-2)^4 = 16$, а не -16; выражение не имеет смысла

Пример 1

Вычислите $\sqrt[4]{0{,}0081}$.

Решение. $0{,}3^4 = 0{,}09 \cdot 0{,}09 = 0{,}0081$ и $0{,}3 \geq 0$. Ответ: $0{,}3$.

Пример 2

Вычислите $4\sqrt[3]{-\frac{1}{64}} + \sqrt[5]{32}$.

Решение. $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}} = -\frac{1}{4}$, так как $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64}$; $\sqrt[5]{32} = 2$. Итого $4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 = 1$.

Пример 3

Имеют ли смысл $\sqrt[6]{-64}$ и $\sqrt[7]{-128}$?

Решение. $\sqrt[6]{-64}$ — нет: показатель чётный, подкоренное отрицательное. $\sqrt[7]{-128} = -2$, потому что $(-2)^7 = -128$.

Задания

- **Вычислите**

6.1 $\sqrt[3]{27}$	6.2 $\sqrt[3]{-64}$	6.3 $\sqrt[4]{81}$	6.4 $\sqrt[5]{32}$	6.5 $\sqrt[3]{0{,}008}$
6.6 $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$	6.7 $\sqrt[5]{-1}$	6.8 $\sqrt[3]{1000}$	6.9 $\sqrt[6]{64}$	6.10 $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

- **Имеет ли смысл выражение (да / нет)?**

6.11 $\sqrt[3]{-5}$	6.12 $\sqrt[4]{-5}$	6.13 $\sqrt[6]{(-2)^3}$	6.14 $\sqrt[4]{(-2)^3 \cdot (-3)}$

- **Вычислите**

6.15 $\sqrt[3]{-125} + \sqrt[4]{16}$	6.16 $2\sqrt[5]{-243} + \sqrt[3]{216}$	6.17 $10\sqrt[4]{0{,}0016}$	6.18 $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5$
6.19 $\left(-\sqrt[3]{4}\right)^3$	6.20 $\left(\sqrt[4]{3}\right)^8$	6.21 $\sqrt[3]{-0{,}001} - \sqrt[4]{0{,}0001}$	6.22 $\sqrt[7]{128} - \sqrt[3]{-1}$

- **Вычислите**

6.23 $6\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} - 2\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$	6.24 $\sqrt[3]{2^9}$	6.25 $\sqrt[4]{3^8 \cdot 2^4}$
6.26 $\sqrt[5]{10^{10}} : \sqrt[3]{10^6}$	6.27 $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$	

Итог раздела: верно _____ из 27

§7 Уравнение $x^n = a$

9–10 кл. · ≈ 25 мин · 16 заданий

Зачем. Сколько корней у уравнения $x^n = a$, зависит от чётности n и знака a. Этот же разбор понадобится в иррациональных уравнениях и при отборе корней.

n нечётное

При любом a ровно один корень:

$$x = \sqrt[n]{a}$$

$x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$; $x^5 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[5]{3}$.

n чётное

$a > 0$: два корня $x = \pm\sqrt[n]{a}$.

$a = 0$: один корень $x = 0$.

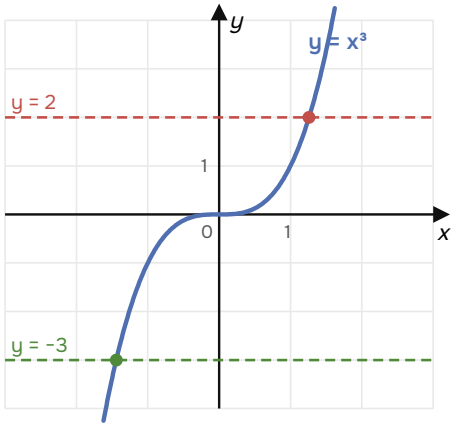
$a < 0$: корней нет.

$x^4 = 81 \Rightarrow x = \pm 3$; $x^6 = -1$ – нет корней.

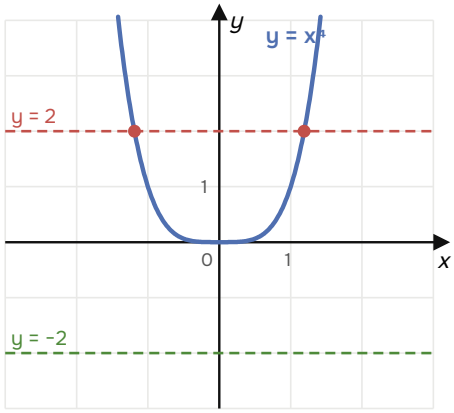
Сначала привести к виду $x^n = a$

$3x^3 + 24 = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$.

$(2x - 1)^4 = 16 \Rightarrow 2x - 1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1{,}5$ или $x = -0{,}5$.



Нечётная степень: любая прямая $y = a$ пересекает график один раз



Чётная степень: при $a > 0$ – две точки, при $a < 0$ – ни одной

Откуда правило

Посмотрите на графики. $y = x^3$ возрастает и проходит все значения от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому горизонтальная прямая $y = a$ пересекает его ровно в одной точке. $y = x^4$ симметричен относительно оси Oy и лежит не ниже оси Ox: прямая $y = 2$ пересекает его в двух симметричных точках $\pm\sqrt[4]{2}$, прямая $y = -2$ – нигде.

Типичные ошибки

× $x^4 = 16 \Rightarrow x = 2$	✓ Потерян корень: $x = \pm 2$
× $x^3 = -27$ – нет корней	✓ $x = -3$: нечётная степень бывает отрицательной
× $x^6 = -64 \Rightarrow x = \pm 2$	✓ $(\pm 2)^6 = 64 \neq -64$; корней нет

Пример 1

Решите $x^4 = 5$ и $x^5 = -32$.

Решение. $x^4 = 5$: $x = \pm\sqrt[4]{5}$. $x^5 = -32$: $x = \sqrt[5]{-32} = -2$.

Пример 2

Решите $(2x-1)^4=16$.

Решение. Обозначим $t=2x-1$: $t^4=16$, $t=\pm 2$. $2x-1=2 \Rightarrow x=1{,}5$; $2x-1=-2 \Rightarrow x=-0{,}5$.

Задания

• Решите уравнение

7.1 $x^3=125$	7.2 $x^3=-8$	7.3 $x^4=16$
7.4 $x^4=-81$	7.5 $x^6=64$	7.6 $x^5=-1$

•• Решите уравнение

7.7 $x^3=5$	7.8 $x^4=7$	7.9 $2x^3=-54$
7.10 $x^4-625=0$	7.11 $0{,}5x^5=16$	7.12 $\frac{x^4}{3}=27$

••• Решите уравнение

7.13 $(x-2)^3=-27$	7.14 $(2x+1)^4=81$	7.15 $(x+1)^6=64$	7.16 $8x^3+1=0$

Итог раздела: верно _____ из 16

§8

Свойства корней n-й степени

10 кл. · ≈ 45 мин · 28 заданий

Зачем. Пять свойств позволяют перемножать и делить корни, сокращать показатели и сводить корень из корня к одному корню. Почти каждое задание ЕГЭ на корни решается одним-двумя из них.

Произведение и частное

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2.$

Степень корня

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$\left(\sqrt[4]{9}\right)^2 = \sqrt[4]{81} = 3.$

Корень из корня

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2.$

Основное свойство

Показатель корня и показатель степени можно умножить или разделить на одно число:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}.$

Когда можно

Для чётных показателей — при $a, b \geq 0$.

Для нечётных n первые три свойства верны при любых a, b:

$\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{-64} = -4.$

Откуда правило

Докажем первое свойство. Число $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ при $a, b \geq 0$ неотрицательно. Возведём его в n-ю степень: $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$ (свойство $(xy)^n = x^n y^n$ из §2). Неотрицательное число, n-я степень которого равна ab, по определению и есть $\sqrt[n]{ab}$. Корень из корня: $\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$

Типичные ошибки

× $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a+b}$	✓ Для суммы свойства нет: $\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 2$, а $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$
× $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[3]{4}$	✓ Показатели разные — сначала общий показатель: $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{32}$
× $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[5]{a}$	✓ Показатели перемножают: $\sqrt[6]{a}$
× $\sqrt[4]{(-2)(-8)} = \sqrt[4]{-2} \cdot \sqrt[4]{-8}$	✓ При чётном показателе раскладывать можно только неотрицательные множители: $\sqrt[4]{16} = 2$

Пример 1

Вычислите $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$.

Решение. $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = 2.$

Пример 2

Вычислите $\sqrt[6]{27} \cdot \sqrt{3}$.

Решение. По основному свойству $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$. Значит, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

Пример 3

Вычислите $\sqrt[3]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}}$.

Решение. Под одним корнем: $\sqrt[3]{(11 - \sqrt{57})(11 + \sqrt{57})} = \sqrt[3]{121 - 57} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Задания

• **Вычислите** $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

8.1 $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$	8.2 $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}$	8.3 $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$	8.4 $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$
8.5 $\dfrac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}}$	8.6 $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$	8.7 $\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{3}$	8.8 $\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{-3}}$

•• **Вычислите** корень из корня и основное свойство

8.9 $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$	8.10 $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$	8.11 $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$	8.12 $\left(\sqrt[6]{8}\right)^2$
8.13 $\left(\sqrt[4]{25}\right)^2$	8.14 $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt{2}$	8.15 $\sqrt[10]{32} \cdot \sqrt{8}$	8.16 $\sqrt[8]{81} \cdot \sqrt[4]{9}$

•• **Вычислите**

8.17 $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$	8.18 $\sqrt[3]{0{,}2} \cdot \sqrt[3]{40}$	8.19 $\sqrt[4]{0{,}5} \cdot \sqrt[4]{162}$
8.20 $\dfrac{\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{6}}$	8.21 $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$	8.22 $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{-1}$

●●● **Вычислите**

8.23 $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}$	**8.24** $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{2}}$	**8.25** $\sqrt[4]{3\sqrt{3}}\cdot\sqrt[8]{3}$
8.26 $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$	**8.27** $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$	**8.28** $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{125}}{\sqrt[6]{5}}$

Итог раздела: верно _____ из 28

§9

Корень из степени: модуль и буквы

10 кл. · ≈ 30 мин · 18 заданий

Зачем. Самая частая потеря баллов в преобразованиях с буквами — забытый модуль. Правило одно, но его нужно чувствовать на числах, прежде чем применять к буквам.

Главное правило

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n \text{ чётное} \\ a, & n \text{ нечётное} \end{cases}$$

$\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$, $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$.

С буквами

При чётном n выносим множитель по модулю:

$$\sqrt[4]{a^4 b} = |a|\sqrt[4]{b}$$

$\sqrt[6]{a^6} = -a$ при $a < 0$; $\sqrt[4]{16a^8} = 2a^2$ (модуль не нужен: $a^2 \geq 0$).

С числами-корнями

Сначала определите знак под степенью.

$\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$, так как $\sqrt{2} > 1$.

Откуда правило

Корень чётной степени — неотрицательное число. a^n при чётном n одинаково для a и $-a$, поэтому из двух кандидатов a и $-a$ годится тот, который ≥ 0, — это $|a|$. При нечётном n знак сохраняется, кандидат один: сам a.

Типичные ошибки

× $\sqrt[4]{a^4} = a$	✓ $\sqrt[4]{a^4} = \lvert a\rvert$; при $a = -2$ слева 2, а не -2
× $\sqrt[3]{a^3} = \lvert a\rvert$	✓ Нечётный показатель: $\sqrt[3]{a^3} = a$
× $\sqrt[6]{(-2)^6} = -2$	✓ $\sqrt[6]{64} = 2$

Пример 1

Упростите $\sqrt[3]{-27a^6b^3}$.

Решение. Нечётный показатель, модули не нужны: $\sqrt[3]{(-3a^2b)^3} = -3a^2b$.

Пример 2

Упростите $\sqrt[6]{(a-2)^6} + \sqrt[4]{(a-6)^4}$ при $2 < a < 6$.

Решение. $\sqrt[6]{(a-2)^6} = |a-2| = a-2$ (так как $a > 2$); $\sqrt[4]{(a-6)^4} = |a-6| = 6-a$ (так как $a < 6$). Сумма: $a - 2 + 6 - a = 4$.

Задания

• Вычислите

9.1 $\sqrt[4]{(-5)^4}$	9.2 $\sqrt[3]{(-5)^3}$	9.3 $\sqrt[6]{(-2)^6}$
9.4 $\sqrt[7]{(-2)^7}$	9.5 $\sqrt[4]{(-3)^8}$	9.6 $\sqrt[3]{(-2)^6}$

•• Упростите

9.7 $\sqrt[4]{a^4}$ при $a < 0$	9.8 $\sqrt[3]{a^3}$ при $a < 0$	9.9 $\sqrt[4]{16a^8}$
9.10 $\sqrt[3]{-8a^6}$	9.11 $\sqrt[4]{a^{12}}$ при $a < 0$	9.12 $\sqrt[5]{32a^{10}b^5}$

••• Вычислите

9.13 $\sqrt[4]{(2-\sqrt{5})^4} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3}$	9.14 $\sqrt[6]{(3-\sqrt{10})^6} - \sqrt{10}$	9.15 $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4} - \sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3}$

••• Упростите

9.16 $\sqrt[4]{(a-5)^4} + \sqrt[3]{(a-5)^3}$ при $a < 5$
9.17 $\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[5]{a^5}$ при $a < 0$
9.18 $\sqrt[4]{(a+1)^4} - \sqrt[6]{(a-3)^6}$ при $-1 < a < 3$

Итог раздела: верно _____ из 18

§10 Вынесение множителя, подобные корни, сравнение

10 кл. · ≈ 40 мин · 26 заданий

Зачем. Вынесение множителя превращает $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$ в $5\sqrt[3]{2}$, а общий показатель позволяет сравнить $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$ без калькулятора.

Вынесение и внесение

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b} \quad (a \geq 0)$$

$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$.

Внесение — обратно: $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$.

При нечётном n минус вносится внутрь: $-2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{-40}$. При чётном — остаётся снаружи: $-3\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{162}$.

Подобные корни

Складывают корни с одинаковым показателем и одинаковым подкоренным числом:

$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} = 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$.

Сравнение

При одинаковом показателе больше тот корень, у которого больше подкоренное: $\sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{8} = 2$.

Разные показатели — приведите к общему (НОК): $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$, $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$, значит $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

> **Откуда правило**
>
> Почему корни можно сравнивать по подкоренным числам? Функция $y = \sqrt[n]{x}$ возрастает (см. §14): чем больше число под корнем, тем больше корень. А общий показатель получается из основного свойства: $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3\cdot 2]{3^2}$.

Типичные ошибки

× $\sqrt[3]{16} = 4\sqrt[3]{1}$	✓ Выносят куб, а не квадрат: $16 = 8 \cdot 2$, $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$
× $-2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{48}$	✓ Под корень чётной степени отрицательное не вносят: $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{48}$
× $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4}$	✓ $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$

Пример 1

Упростите $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3}$.

Решение. $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$. Итого $2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3}$.

Пример 2

Сравните $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{3}$.

Решение. НОК(4, 3) = 12. $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$. $125 > 81$, поэтому $\sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{3}$.

Задания

- **Вынесите множитель из-под корня**

10.1 $\sqrt[3]{16}$	10.2 $\sqrt[3]{40}$	10.3 $\sqrt[4]{48}$
10.4 $\sqrt[3]{-81}$	10.5 $\sqrt[5]{64}$	10.6 $\sqrt[3]{250}$

- **Внесите множитель под знак корня**

10.7 $2\sqrt[3]{3}$	10.8 $3\sqrt[4]{2}$	10.9 $-2\sqrt[3]{5}$	10.10 $-3\sqrt[4]{2}$

- **Упростите**

10.11 $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$	10.12 $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}$	10.13 $2\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{128}$
10.14 $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{2}$	10.15 $\sqrt[3]{375}-2\sqrt[3]{24}$	

- **Сравните (поставьте знак $>$, $<$ или $=$)**

10.16 $\sqrt[3]{9}$ и 2	10.17 $\sqrt[4]{80}$ и 3	10.18 $\sqrt[3]{-7}$ и -2
10.19 $2\sqrt[3]{3}$ и $3\sqrt[3]{2}$	10.20 $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$	10.21 $\sqrt[6]{8}$ и $\sqrt{2}$

- **Расположите в порядке возрастания**

10.22 $\sqrt{3};\quad \sqrt[3]{5};\quad \sqrt[6]{30}$	10.23 $\sqrt[3]{4};\quad \sqrt[4]{6};\quad \sqrt[6]{15}$

- **Между какими соседними целыми числами находится число?**

10.24 $\sqrt[3]{50}$	10.25 $\sqrt[4]{90}$	10.26 $-\sqrt[3]{20}$

Итог раздела: верно _____ из 26

§11 Корень в знаменателе и дроби с корнями

10 кл. · ≈ 35 мин · 16 заданий

Зачем. В ответе ЕГЭ корень в знаменателе не оставляют, а сокращение дробей с корнями — частый шаг в преобразованиях. Ключ к обоим — формулы сокращённого умножения.

Один корень в знаменателе

Домножьте, чтобы под корнем получилась полная степень:

$$\frac{6}{\sqrt[3]{3}} = \frac{6\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}} = \frac{6\sqrt[3]{9}}{3} = 2\sqrt[3]{9}$$

Сумма или разность

Квадратные корни: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$.

Кубические — разность и сумма кубов:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1.$$

Сокращение дробей

Увидеть в числителе разность квадратов или кубов:

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$
$$\frac{a-8}{\sqrt[3]{a}-2} = \sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4$$

Откуда правило

Откуда «неполный квадрат»? Перемножим: $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3 = x^3-y^3$. Средние слагаемые взаимно уничтожаются. При $x=\sqrt[3]{2}$, $y=1$ получаем $2-1=1$: корень из знаменателя исчез.

Типичные ошибки

× $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$	✓ $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4} \neq 2$. Домножают на $\sqrt[3]{4}$: $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
× $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ домножить на $\sqrt[3]{2}+1$	✓ Это работает только с квадратными корнями. Для кубических — неполный квадрат суммы
× $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$	✓ $a-b = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, остаётся сумма

Пример 1

Избавьтесь от корня в знаменателе: $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$.

Решение. $x=\sqrt[3]{3}$, $y=1$; домножаем на $x^2+xy+y^2 = \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$. Знаменатель: $x^3-y^3 = 3-1 = 2$.

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}$.

Пример 2

Сократите $\frac{a+1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}$.

Решение. $a+1 = (\sqrt[3]{a})^3+1^3 = (\sqrt[3]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1)$. После сокращения: $\sqrt[3]{a}+1$.

Задания

• **Избавьтесь от корня в знаменателе**

11.1 $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$	11.2 $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}$	11.3 $\dfrac{10}{\sqrt[4]{5}}$	11.4 $\dfrac{12}{\sqrt[4]{8}}$	11.5 $\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}}$

•• **Избавьтесь от корня в знаменателе**

11.6 $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$	11.7 $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}$	11.8 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$	11.9 $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-1}$

•• **Сократите дробь ($a, b > 0$, $a \neq b$, знаменатель $\neq 0$)**

11.10 $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$	11.11 $\dfrac{a-8}{\sqrt[3]{a}-2}$
11.12 $\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$	11.13 $\dfrac{a-1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}$

••• **Вычислите**

11.14 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$	11.15 $\dfrac{7}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$	11.16 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$

Итог раздела: верно _____ из 16

§12 Степень с рациональным показателем

10 кл. · ≈ 35 мин · 27 заданий

Зачем. В ЕГЭ корни чаще записаны дробными показателями: $16^{-0{,}75}$, $a^{\frac{2}{3}}$. Переход «показатель ↔ корень» — это перевод с одного языка на другой, и его нужно делать без запинки в обе стороны.

Определение

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (a > 0,\ n \geq 2)$$

Знаменатель показателя — показатель корня, числитель — степень.

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4.$

Как считать

Сначала корень, потом степень — числа остаются маленькими:

$27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81.$

Минус в показателе — «перевернуть»:

$16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{8}.$

Десятичный показатель

$a^{0{,}5} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},\ a^{0{,}25} = \sqrt[4]{a},\ a^{0{,}75} = \sqrt[4]{a^3},$

$a^{1{,}5} = a^{\frac{3}{2}} = a\sqrt{a},\ a^{0{,}2} = \sqrt[5]{a}.$

$0{,}25^{-1{,}5} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = 8.$

Откуда правило

Хочется, чтобы свойство $(a^p)^q = a^{pq}$ работало и для дробей. Тогда $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^1 = a$, то есть $a^{\frac{1}{n}}$ — число, n-я степень которого равна a: это $\sqrt[n]{a}$. А $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. Почему только $a > 0$? Иначе возникает противоречие: $(-8)^{\frac{1}{3}}$ «равно» -2, но $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, а $(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$. Поэтому в школьном курсе дробные степени берут только от положительных чисел (и от нуля при положительном показателе).

Типичные ошибки

× $8^{\frac{2}{3}} = 8 \cdot \frac{2}{3}$	✓ Показатель — не множитель: $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4$
× $16^{-\frac{1}{2}} = -4$	✓ $16^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}$
× $27^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{27} = 6$	✓ Числитель — степень: $\left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 9$
× $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$	✓ Дробная степень отрицательного числа не определена; верно $\sqrt[3]{-8} = -2$

Пример 1

Вычислите $16^{-0{,}75}$.

Решение. $-0{,}75 = -\frac{3}{4}$. $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.

Пример 2

Вычислите $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{0{,}4}$.

Решение. $0{,}4 = \frac{2}{5}$. $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}} = \dfrac{1}{2}$, в квадрате $\dfrac{1}{4}$.

Пример 3

Запишите $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ в виде степени.

Решение. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, обратное число — $a^{-\frac{2}{3}}$.

Задания

- **Запишите в виде степени с рациональным показателем ($a > 0$)**

12.1 $\sqrt[3]{a^2}$	12.2 $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$	12.3 $a\sqrt{a}$	12.4 $\sqrt[5]{a^{-3}}$

- **Вычислите**

12.5 $9^{\frac{1}{2}}$	12.6 $8^{\frac{1}{3}}$	12.7 $16^{\frac{1}{4}}$	12.8 $27^{\frac{2}{3}}$	12.9 $4^{\frac{3}{2}}$
12.10 $32^{\frac{3}{5}}$	12.11 $81^{0{,}25}$	12.12 $100^{0{,}5}$	12.13 $25^{-\frac{1}{2}}$	12.14 $8^{-\frac{2}{3}}$

- **Вычислите**

12.15 $16^{-0{,}25}$	12.16 $0{,}25^{-\frac{1}{2}}$	12.17 $0{,}008^{\frac{1}{3}}$	12.18 $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$
12.19 $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$	12.20 $0{,}0016^{-0{,}25}$	12.21 $125^{\frac{2}{3}} - 81^{\frac{3}{4}}$	12.22 $4^{1{,}5} + 27^{\frac{1}{3}}$

- **Вычислите**

12.23 $49^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$	12.24 $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0{,}75} + \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$	12.25 $64^{\frac{1}{2}} - 64^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{6}}$
12.26 $0{,}001^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}}$	12.27 $\left(27^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot 5^{-2}$	

Итог раздела: верно _____ из 27

§13 Свойства степени с рациональным показателем

10 кл. · ≈ 40 мин · 26 заданий

Зачем. Те же пять свойств из §2, только с дробями в показателях. С ними выражение $\dfrac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$ считается в одну строку: сложить и вычесть дроби.

Свойства ($a, b > 0$)

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Корни → степени

Если в выражении корни с разными показателями, переведите всё в степени и работайте с дробями:

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Формулы с дробными степенями

Обозначьте $x = a^{\frac{1}{2}}$: тогда $a = x^2$.

$$a - b = \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$a + b = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$$

Откуда правило

Свойства доказываются переходом к корням. Например, $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}$, и $\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Каждое свойство степени — это свойство корня из §8, записанное на другом языке.

Типичные ошибки

× $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$	✓ Показатели складывают: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
× $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} = a$	✓ $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} = 2a^{\frac{1}{2}}$
× $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{17}{12}}$	✓ Степень степени — умножение: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

Пример 1

Вычислите $\dfrac{2^{3,5}\cdot 3^{5,5}}{6^{4,5}}$.

Решение. $6^{4,5} = 2^{4,5}\cdot 3^{4,5}$. Получаем $2^{3,5-4,5}\cdot 3^{5,5-4,5} = 2^{-1}\cdot 3 = 1{,}5$.

Пример 2

Сократите $\dfrac{a-9}{a^{\frac{1}{2}}+3}$.

Решение. $a - 9 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 3^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} - 3\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 3\right)$. Ответ: $a^{\frac{1}{2}} - 3$.

Задания

• Вычислите

13.1 $5^{1,2}\cdot 5^{0,8}$	13.2 $\dfrac{3^{2,7}}{3^{0,7}}$	13.3 $\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{4}$	13.4 $7^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{\frac{2}{3}}$
13.5 $\dfrac{6^{1,5}}{6^{-0,5}}$	13.6 $2^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{4}}$	13.7 $12^{\frac{1}{3}}\cdot 18^{\frac{1}{3}}$	13.8 $\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

•• Вычислите

13.9 $\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{7}{12}}}$	13.10 $3^{\frac{1}{2}}\cdot 27^{\frac{1}{6}}$	13.11 $5^{\frac{2}{3}}\cdot 125^{\frac{1}{9}}$
13.12 $\dfrac{\left(2^{0,5}\right)^{6}}{4^{0,5}}$	13.13 $0{,}2^{-\frac{1}{3}}\cdot 25^{\frac{1}{3}}$	13.14 $9^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$

•• Упростите ($a, b > 0$)

13.15 $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}$	13.16 $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}}$	13.17 $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$
13.18 $\dfrac{a^{1,5}\cdot a^{0,5}}{a}$	13.19 $\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{4}$	13.20 $\dfrac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}}$

••• Сократите или упростите ($a, b > 0$, знаменатели $\neq 0$)

13.21 $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$	13.22 $\dfrac{a-4}{a^{\frac{1}{2}}+2}$
13.23 $\dfrac{a+27}{a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}+9}$	13.24 $\dfrac{a-2a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1}$
13.25 $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}-1}-a^{\frac{1}{2}}$	13.26 $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

Итог раздела: верно _____ из 26

§14 Функция y = ⁿ√x: область определения, оценка, сравнение

10 кл. · ≈ 30 мин · 18 заданий

Зачем. График объясняет, почему корень чётной степени не берут из отрицательных и почему корни можно сравнивать по подкоренным числам. Это же нужно для оценок «между какими целыми» и для отбора корней.

Свойства $y = \sqrt[n]{x}$

n **чётное:** область определения $x \geq 0$, значения $y \geq 0$.

n **нечётное:** x — любое, y — любое, функция нечётная: $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

В обоих случаях функция **возрастает**: $a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Степени с одним основанием

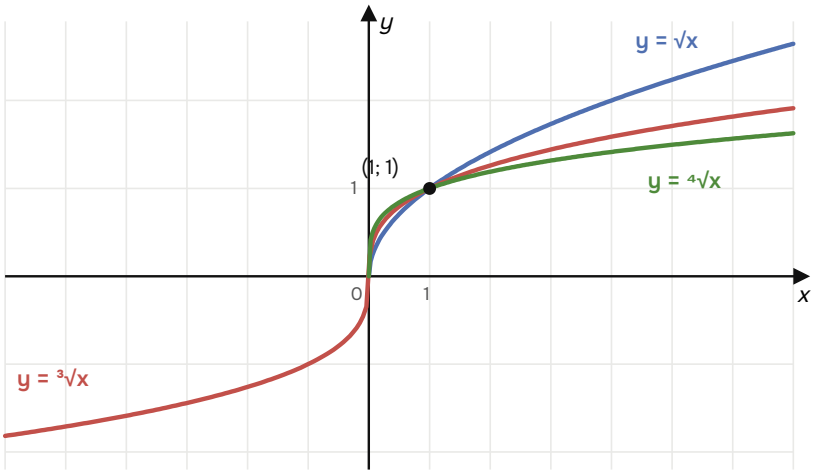
$a > 1$: чем больше показатель, тем больше степень: $3^{\frac{1}{2}} > 3^{\frac{1}{3}}$.

$0 < a < 1$: наоборот: $0{,}5^{\frac{1}{3}} > 0{,}5^{\frac{1}{2}}$.

Область определения $y = x^p$ при дробном p: $x \geq 0$ (если $p > 0$), $x > 0$ (если $p < 0$).

Оценка корня

Ищем соседние точные степени: $27 < 50 < 64$, значит $3 < \sqrt[3]{50} < 4$.



Все три графика проходят через $(0; 0)$ и $(1; 1)$.
При $x > 1$: $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x}$

Откуда правило

Почему корень возрастает? Если бы при $a < b$ оказалось $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$, то, возведя в n-ю степень (для неотрицательных чисел это сохраняет знак неравенства), получили бы $a \geq b$ — противоречие.

Типичные ошибки

× $y = \sqrt[3]{x}$ определена при $x \geq 0$	✓ Кубический корень определён при любом x
× $0{,}5^{\frac{1}{2}} > 0{,}5^{\frac{1}{3}}$, ведь $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$	✓ При основании меньше 1 большему показателю соответствует меньшая степень

Пример 1

Найдите область определения $y = \sqrt[4]{6 - 2x}$.

Решение. Показатель чётный: $6 - 2x \geq 0$, $x \leq 3$. Ответ: $(-\infty;\, 3]$.

Пример 2

Сравните $2^{\frac{2}{3}}$ и $3^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Общий знаменатель показателей 6: $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{16}$, $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$. $16 < 27$, поэтому $2^{\frac{2}{3}} < 3^{\frac{1}{2}}$.

Задания

• Найдите область определения функции

14.1 $y = \sqrt[4]{x - 3}$	**14.2** $y = \sqrt[3]{x + 5}$	**14.3** $y = \sqrt[6]{2 - x}$
14.4 $y = (x - 1)^{\frac{1}{2}}$	**14.5** $y = (x + 2)^{-\frac{1}{3}}$	

•• Сравните

14.6 $3^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$	**14.7** $0{,}5^{\frac{1}{3}}$ и $0{,}5^{\frac{1}{2}}$	**14.8** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1{,}5}$ и 1
14.9 $\sqrt[3]{-10}$ и $\sqrt[3]{-9}$	**14.10** $5^{-\frac{1}{4}}$ и $4^{-\frac{1}{4}}$	**14.11** $2^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$

•• Между какими соседними целыми числами находится число?

14.12 $\sqrt[3]{100}$	**14.13** $2^{\frac{5}{2}}$	**14.14** $\sqrt[4]{200}$	**14.15** $3^{\frac{3}{4}}$

••• Решите

14.16 Сколько целых чисел лежит между $\sqrt[3]{10}$ и $\sqrt{50}$?

14.17 Найдите наибольшее натуральное n, при котором $\sqrt[4]{n} < 3$.

14.18 Найдите наименьшее натуральное n, при котором $\sqrt[3]{n} > 2\sqrt{3}$.

Итог раздела: верно _____ из 18

§15 Простейшие уравнения с корнями и степенями

10–11 кл. · ≈ 35 мин · 17 заданий

Зачем. Задание «простейшие уравнения» части 1 ЕГЭ регулярно содержит корни: $\sqrt[3]{x-4}=3$, $\sqrt{15-2x}=3$. Если корень чётной степени — проверка обязательна.

$\sqrt[n]{f(x)}=c$

n **нечётное:** $f(x)=c^n$ при любом c.

$\sqrt[3]{x-4}=3 \Rightarrow x-4=27 \Rightarrow x=31$.

n **чётное:** при $c\geq 0$ — $f(x)=c^n$; при $c<0$ корней нет.

$\sqrt[4]{2x+1}=-1$ — корней нет: корень чётной степени не бывает отрицательным.

$\sqrt{f(x)}=g(x)$

Возводим в квадрат и **проверяем**: правая часть должна быть ≥ 0.

$\sqrt{x+6}=x$: $x+6=x^2$, $x=3$ или $x=-2$. При $x=-2$ правая часть отрицательна — посторонний корень. Ответ: 3.

Дробный показатель

$x^{\frac{3}{2}}=8$: $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}}$, $x=4$.

Помните: $x^{\frac{m}{n}}$ определена при $x\geq 0$, поэтому отрицательных корней здесь быть не может.

Откуда правило

Откуда посторонние корни? Из $A=B$ следует $A^2=B^2$, но обратно — нет: из $A^2=B^2$ следует $A=B$ **или** $A=-B$. Возведение в квадрат «склеивает» уравнения $\sqrt{x+6}=x$ и $\sqrt{x+6}=-x$; корень -2 принадлежит второму. Возведение в нечётную степень ничего не склеивает, поэтому $\sqrt[3]{f}=g$ можно возводить в куб без проверки.

Типичные ошибки

× $\sqrt{x+3}=-2 \Rightarrow x+3=4 \Rightarrow x=1$	✓ $\sqrt{4}=2\neq -2$; корней нет
× $\sqrt{2x+3}=x$: ответ 3 и -1	✓ При $x=-1$: $\sqrt{1}=1\neq -1$. Ответ: 3
× $x^{\frac{1}{3}}=-2 \Rightarrow x=-8$	✓ Степень $x^{\frac{1}{3}}$ определена при $x\geq 0$ и не бывает отрицательной; корней нет

Пример 1

Решите $\sqrt{15-2x}=3$.

Решение. $15-2x=9$, $x=3$. Правая часть $3\geq 0$ — проверка выполнена.

Пример 2

Решите $\sqrt[3]{x^3-19}=x-1$.

Решение. Возводим в куб (без потери и приобретения корней): $x^3-19=x^3-3x^2+3x-1$, $3x^2-3x-18=0$, $x^2-x-6=0$, $x=3$ или $x=-2$. Оба подходят.

Задания

• **Решите уравнение**

15.1 $\sqrt{x-3}=4$	15.2 $\sqrt[3]{x+2}=-2$	15.3 $\sqrt[4]{x-1}=2$
15.4 $\sqrt[3]{2x-5}=3$	15.5 $\sqrt{6-x}=-1$	15.6 $\sqrt[5]{3x+1}=1$

•• **Решите уравнение**

15.7 $\sqrt{\dfrac{2}{x+3}}=\dfrac{1}{2}$	15.8 $\sqrt[3]{x^2-17}=2$	15.9 $\sqrt{x^2+9}=5$
15.10 $x^{\frac{1}{3}}=4$	15.11 $x^{\frac{3}{2}}=27$	15.12 $\sqrt[3]{x}=-\dfrac{1}{2}$

••• **Решите уравнение**

15.13 $\sqrt{x+6}=x$	15.14 $\sqrt{2x+3}=x$	15.15 $\sqrt{12-x}=x$
15.16 $\sqrt{x^2-3x+11}=x+1$	15.17 $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$	

Итог раздела: верно _____ из 17

§16 Тренажёр ЕГЭ, часть 1

ЕГЭ · ≈ 60 мин · 20 заданий

Зачем. 20 заданий вперемешку, как на экзамене: по формулировке не видно, какое свойство нужно. Цель — 18 из 20 за 60 минут.

Как работать

В тренажёре два типа заданий части 1 профильного ЕГЭ: «вычисления и преобразования» (в 2022–2026 — №7; по проекту КИМ-2027 номер сдвигается на 8) и «простейшие уравнения» (было №6, по проекту — №7). Финальную демоверсию 2027 стоит сверить.

Формат ответа ЕГЭ: целое число или конечная десятичная дробь. Если вышло $\sqrt{2}$ или $\frac{1}{3}$ — ищите ошибку.

Порядок решения

1. Переведите корни в степени (или наоборот) — к одному языку.
2. Разложите основания на простые множители: $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 2^2 \cdot 3$.
3. Соберите показатели у каждого простого основания.
4. Проверьте формат: целое или конечная десятичная.

Пример

Найдите значение $\dfrac{\sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$.

Решение. $7^{\frac{1}{9}+\frac{1}{18}-\frac{1}{6}} = 7^{\frac{2+1-3}{18}} = 7^0 = 1.$

Задания

ЕГЭ **Найдите значение выражения**

16.1 $\dfrac{(2\sqrt{7})^2}{14}$	16.2 $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[6]{25}$	16.3 $\dfrac{\sqrt[5]{12} \cdot \sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{3}}$
16.4 $7^{\frac{4}{9}} \cdot 49^{\frac{5}{18}}$	16.5 $\dfrac{\left(5^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{10^9}$	16.6 $\dfrac{\sqrt{2{,}8} \cdot \sqrt{4{,}2}}{\sqrt{0{,}24}}$
16.7 $(\sqrt{13}-\sqrt{7})(\sqrt{13}+\sqrt{7})$	16.8 $0{,}8 \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 49^{\frac{1}{3}}$	16.9 $\sqrt[3]{(-3)^3} + \sqrt[4]{(-2)^4}$
16.10 $\left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16}\right)^3$	16.11 $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$	16.12 $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 9$
16.13 $16^{0{,}75} + \left(\dfrac{1}{32}\right)^{-0{,}2}$	16.14 $\dfrac{6^{2,4}}{2^{0,4} \cdot 3^{1,4}}$	

ЕГЭ **Найдите значение выражения при данном значении переменной**

16.15
$\dfrac{4\sqrt[9]{a}\cdot\sqrt[18]{a}}{\sqrt[6]{a}}$ при $a>0$

16.16
$a^{\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)$ при $a=3$

16.17
$\dfrac{b^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{3}{4}}}{b^{-1}}$ при $b=1{,}5$

ЕГЭ **Найдите корень уравнения. Если корней несколько, в ответ запишите меньший**

16.18
$\sqrt{\dfrac{1}{5-2x}}=\dfrac{1}{3}$

16.19
$\sqrt[3]{x-4}=3$

16.20
$\sqrt{-72-17x}=-x$

Итог раздела: верно _____ из 20

§17 Выше уровня ЕГЭ части 1

10–11 кл. · ≈ 70 мин · 14 заданий

Зачем. Задачи, где нужен не один шаг по правилу, а идея: увидеть полный квадрат под корнем, обозначить сумму корней буквой, сложить «телескопом». Ключевые шаги ко всем задачам — в конце тетради.

Двойной радикал

Ищем полный квадрат: $a \pm 2\sqrt{b} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$, где $x + y = a$, $xy = b$.

$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$: $x + y = 5$, $xy = 6 \to x = 3$, $y = 2$. Ответ: $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Сумма кубических корней

Для $t = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ работает тождество

$$t^3 = A + B + 3\sqrt[3]{AB} \cdot t$$

Если AB — точный куб, получаем кубическое уравнение на t.

Телескоп

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

В сумме соседние слагаемые уничтожаются, остаются первое и последнее.

Задания

●●● Вычислите

17.1
$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

17.2
$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$

17.3
$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

17.4
$\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}}$

17.5
$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$

17.6
$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$

17.7
$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$

17.8
$\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right)$

●●● Сравните

17.9
$\sqrt{5} + \sqrt{10}$ и $\sqrt{3} + \sqrt{14}$

17.10
$\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[5]{6}$

●●● Упростите

17.11
$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} - \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$ при $1 < a < 2$

●●● Решите

17.12

Решите уравнение $\sqrt[3]{x+7} = \sqrt{x+3}$

17.13

Сколько целых корней у уравнения $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}} = 1$?

17.14

Найдите $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$, если $a + a^{-1} = 7$.

Итог раздела: верно _____ из 14

Олимпиадные задачи

★ ≈ 60 мин 5 заданий

Зачем. Для тех, кто прошёл всё и хочет больше.

Задания

★ **Решите**

★1
Докажите, что число $\sqrt[3]{2}$ иррационально.

★2
Что больше: $\sqrt[3]{60}$ или $2+\sqrt[3]{7}$? Калькулятор не нужен.

★3
Вычислите $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

★4
Найдите значение $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}}$ (корни продолжаются бесконечно).

★5
Решите уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$

Итог раздела: верно _____ из 5

Ответы

§1 Натуральная степень

1.1 32
1.2 81
1.3 1000000
1.4 $0{,}008$
1.5 -27
1.6 16
1.7 -16
1.8 -1
1.9 отрицательно
1.10 положительно
1.11 отрицательно
1.12 положительно
1.13 $\frac{8}{27}$
1.14 $-\frac{1}{32}$
1.15 $2{,}25$
1.16 $0{,}0001$
1.17 13
1.18 1
1.19 -1
1.20 72
1.21 9
1.22 3

§2 Свойства степеней

2.1 a^8
2.2 a^8
2.3 a^{12}
2.4 a^9
2.5 a^7
2.6 a^5
2.7 8
2.8 9
2.9 25
2.10 1
2.11 9
2.12 20
2.13 4
2.14 9
2.15 5
2.16 6
2.17 $\frac{4}{9}$
2.18 6
2.19 a^2b^2
2.20 $2a^2$

§3 Целый показатель

3.1 $\frac{1}{8}$
3.2 $0{,}01$
3.3 1
3.4 $\frac{1}{9}$
3.5 4
3.6 $\frac{9}{4}$
3.7 8
3.8 $-\frac{1}{8}$
3.9 25
3.10 8
3.11 81
3.12 $\frac{1}{2}$
3.13 $\frac{1}{6}$
3.14 36
3.15 1000
3.16 26
3.17 128
3.18 41
3.19 600
3.20 $3\cdot 10^6$
3.21 $\frac{8}{3}$
3.22 3
3.23 a^6
3.24 ab

§4 Квадратный корень

4.1 9
4.2 $0{,}8$
4.3 $\frac{3}{7}$
4.4 $1{,}2$
4.5 30
4.6 7
4.7 $0{,}02$
4.8 13
4.9 1
4.10 7
4.11 12
4.12 5
4.13 5
4.14 110
4.15 $-7;\ 7$
4.16 $-0{,}3;\ 0{,}3$
4.17 нет корней
4.18 $-\sqrt{11};\ \sqrt{11}$
4.19 5
4.20 7
4.21 $\frac{5}{12}$

§5 Свойства √

5.1 8
5.2 9
5.3 7
5.4 $2{,}8$
5.5 20
5.6 27
5.7 6
5.8 20
5.9 $2\sqrt{3}$
5.10 $5\sqrt{2}$
5.11 $6\sqrt{3}$
5.12 $6\sqrt{5}$
5.13 $\sqrt{18}$
5.14 $\sqrt{75}$
5.15 $\sqrt{3}$
5.16 $-\sqrt{28}$
5.17 $5\sqrt{2}$
5.18 $2\sqrt{3}$
5.19 $\sqrt{3}$
5.20 3
5.21 $4+2\sqrt{3}$
5.22 7
5.23 $-a$
5.24 $-3a$
5.25 a^2
5.26 $-a^3$
5.27 $3-a$
5.28 2
5.29 $2\sqrt{3}$
5.30 $\sqrt{5}+1$
5.31 $\sqrt{2}$
5.32 3
5.33 $5-2\sqrt{7}$

§6 Определение корня

6.1 3
6.2 -4
6.3 3
6.4 2
6.5 $0{,}2$
6.6 $\frac{2}{5}$
6.7 -1
6.8 10
6.9 2
6.10 $-\frac{2}{3}$
6.11 да
6.12 нет
6.13 нет
6.14 да
6.15 -3
6.16 0
6.17 2
6.18 7
6.19 -4
6.20 9
6.21 $-0{,}2$
6.22 3
6.23 -6
6.24 8
6.25 18
6.26 1
6.27 2

§7 Уравнение $x^n = a$

7.1 5
7.2 -2
7.3 $-2;\ 2$
7.4 нет корней
7.5 $-2;\ 2$
7.6 -1
7.7 $\sqrt[3]{5}$
7.8 $-\sqrt[4]{7};\ \sqrt[4]{7}$
7.9 -3
7.10 $-5;\ 5$
7.11 2
7.12 $-3;\ 3$
7.13 -1
7.14 $-2;\ 1$
7.15 $-3;\ 1$
7.16 $-\frac{1}{2}$

§8 Свойства корней

8.1 4
8.2 2
8.3 2
8.4 3
8.5 3
8.6 5
8.7 -3
8.8 -2
8.9 2
8.10 3
8.11 2
8.12 2
8.13 5
8.14 2
8.15 4
8.16 3
8.17 5
8.18 2
8.19 3
8.20 3
8.21 $\sqrt{5}$
8.22 -3
8.23 3
8.24 $\sqrt[3]{4}$
8.25 $\sqrt{3}$
8.26 4
8.27 $\sqrt{2}$
8.28 $\sqrt{5}$

§9 Корень из степени

9.1 5
9.2 -5
9.3 2
9.4 -2
9.5 9
9.6 4
9.7 $-a$
9.8 a
9.9 $2a^2$
9.10 $-2a^2$
9.11 $-a^3$
9.12 $2a^2b$
9.13 0
9.14 -3
9.15 $2\sqrt{3}-2$
9.16 0
9.17 0
9.18 $2a-2$

§10 Вынесение и сравнение

10.1 $2\sqrt[3]{2}$
10.2 $2\sqrt[3]{5}$
10.3 $2\sqrt[4]{3}$
10.4 $-3\sqrt[3]{3}$
10.5 $2\sqrt[5]{2}$
10.6 $5\sqrt[3]{2}$
10.7 $\sqrt[3]{24}$
10.8 $\sqrt[4]{162}$
10.9 $\sqrt[3]{-40}$
10.10 $-\sqrt[4]{162}$
10.11 $5\sqrt[3]{2}$
10.12 $\sqrt[4]{3}$
10.13 0
10.14 $4\sqrt[4]{2}$
10.15 $\sqrt[3]{3}$
10.16 $\sqrt[3]{9} > 2$
10.17 $\sqrt[4]{80} < 3$
10.18 $\sqrt[3]{-7} > -2$
10.19 $2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}$
10.20 $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$
10.21 $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$
10.22 $\sqrt[3]{5};\ \sqrt{3};\ \sqrt[6]{30}$
10.23 $\sqrt[4]{6};\ \sqrt[6]{15};\ \sqrt[3]{4}$
10.24 3 и 4
10.25 3 и 4
10.26 -3 и -2

§11 Корень в знаменателе

11.1 $2\sqrt[3]{4}$
11.2 $\sqrt[3]{3}$
11.3 $2\sqrt[4]{125}$
11.4 $6\sqrt[4]{2}$
11.5 $\frac{\sqrt[5]{8}}{2}$
11.6 $\sqrt{3}+1$
11.7 $3+\sqrt{2}$
11.8 $\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$
11.9 $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1$
11.10 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$
11.11 $\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4$
11.12 $\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$
11.13 $\sqrt[3]{a}-1$
11.14 $2-\sqrt{2}$
11.15 $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}$
11.16 1

§12 Рациональный показатель

12.1 $a^{\frac{2}{3}}$
12.2 $a^{-\frac{1}{4}}$
12.3 $a^{\frac{3}{2}}$
12.4 $a^{-\frac{3}{5}}$
12.5 3
12.6 2
12.7 2
12.8 9
12.9 8
12.10 8
12.11 3
12.12 10
12.13 $\frac{1}{5}$
12.14 $\frac{1}{4}$
12.15 $\frac{1}{2}$
12.16 2
12.17 0,2
12.18 9
12.19 $\frac{8}{27}$
12.20 5
12.21 -2
12.22 11
12.23 3,5
12.24 24
12.25 6
12.26 6
12.27 1

§13 Свойства дробных степеней

13.1 25
13.2 9
13.3 8
13.4 7
13.5 36
13.6 2
13.7 6
13.8 2
13.9 1
13.10 3
13.11 5
13.12 4
13.13 5
13.14 9
13.15 a
13.16 $a^{\frac{1}{2}}$
13.17 $a^{\frac{1}{2}}$
13.18 a
13.19 ab^2
13.20 $a^{\frac{2}{3}}$
13.21 $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$
13.22 $a^{\frac{1}{2}}-2$
13.23 $a^{\frac{1}{3}}+3$
13.24 $a^{\frac{1}{2}}-1$
13.25 $a+1$
13.26 $a-b$

§14 Функция y = ⁿ√x

14.1 $[3;\,+\infty)$
14.2 $(-\infty;\,+\infty)$
14.3 $(-\infty;\,2]$
14.4 $[1;\,+\infty)$
14.5 $(-2;\,+\infty)$
14.6 $3^{\frac{1}{2}}>3^{\frac{1}{3}}$
14.7 $0{,}5^{\frac{1}{3}}>0{,}5^{\frac{1}{2}}$
14.8 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1{,}5}>1$
14.9 $\sqrt[3]{-10}<\sqrt[3]{-9}$
14.10 $5^{-\frac{1}{4}}<4^{-\frac{1}{4}}$
14.11 $2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$
14.12 4 и 5
14.13 5 и 6
14.14 3 и 4
14.15 2 и 3
14.16 5
14.17 80
14.18 42

§15 Уравнения с корнями

15.1 19
15.2 -10
15.3 17
15.4 16
15.5 нет корней
15.6 0
15.7 5
15.8 $-5;\,5$
15.9 $-4;\,4$
15.10 64
15.11 9
15.12 $-\frac{1}{8}$
15.13 3
15.14 3
15.15 3
15.16 2
15.17 $-3;\,-1$

§16 Тренажёр ЕГЭ

16.1 2
16.2 5
16.3 2
16.4 7
16.5 2
16.6 7
16.7 6
16.8 5,6
16.9 -1
16.10 -2
16.11 5
16.12 4
16.13 10
16.14 12
16.15 4
16.16 8
16.17 2,25
16.18 -2
16.19 31
16.20 -9

§17 Выше ЕГЭ

17.1 $2+\sqrt{3}$
17.2 $3-\sqrt{2}$
17.3 $2\sqrt{5}$
17.4 $\sqrt{2}-1$
17.5 4
17.6 1
17.7 9
17.8 5
17.9 $\sqrt{5}+\sqrt{10}<\sqrt{3}+\sqrt{14}$
17.10 $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{6}$
17.11 $2\sqrt{a-1}$
17.12 1
17.13 6
17.14 3

★ Олимпиадные

★1 доказательство — в решениях
★2 $\sqrt[3]{60}>2+\sqrt[3]{7}$
★3 3
★4 3
★5 $-1;\,7$

Ключевые шаги: §17 и ★

17.1 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

$7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3=(2+\sqrt{3})^2$. Корень: $|2+\sqrt{3}|=2+\sqrt{3}$. **Ответ:** $2+\sqrt{3}$.

17.2 $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

$11-6\sqrt{2}=9-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+2=(3-\sqrt{2})^2$; $3>\sqrt{2}$, модуль раскрывается без смены знака. **Ответ:** $3-\sqrt{2}$.

17.3 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

$6\mp 2\sqrt{5}=(\sqrt{5}\mp 1)^2$. Сумма $(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{5}+1)=2\sqrt{5}$. **Ответ:** $2\sqrt{5}$.

17.4 $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$

$17-12\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^2$ и $3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$. Значит, $17-12\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^4$, а $\sqrt{2}-1>0$. **Ответ:** $\sqrt{2}-1$.

17.5 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

$(2\pm\sqrt{2})^3=8\pm 12\sqrt{2}+12\pm 2\sqrt{2}=20\pm 14\sqrt{2}$. Сумма корней: $(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$. **Ответ:** 4.

17.6 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

Пусть t – сумма. Произведение корней $\sqrt[3]{4-5}=-1$. $t^3=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})+3\cdot(-1)\cdot t=4-3t$, то есть $t^3+3t-4=0$, $(t-1)(t^2+t+4)=0$. Второй множитель корней не имеет, $t=1$. **Ответ:** 1.

17.7 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ (домножить на сопряжённое). Сумма «складывается»: $\sqrt{100}-\sqrt{1}=9$.
Ответ: 9.

17.8 $\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)$

Неполный квадрат разности на сумму: $x=\sqrt[3]{3}$, $y=\sqrt[3]{2}$, $(x^2-xy+y^2)(x+y)=x^3+y^3=3+2=5$.
Ответ: 5.

17.9 $\sqrt{5}+\sqrt{10}$ **и** $\sqrt{3}+\sqrt{14}$

Обе части положительны, сравним квадраты: $15+2\sqrt{50}$ и $17+2\sqrt{42}$. Разность: $2\sqrt{50}-2\sqrt{42}-2$. Так как $\sqrt{50}-\sqrt{42}=\dfrac{8}{\sqrt{50}+\sqrt{42}}<\dfrac{8}{7+6}<1$, левая часть меньше. **Ответ:** $\sqrt{5}+\sqrt{10}<\sqrt{3}+\sqrt{14}$.

17.10 $\sqrt[3]{3}$ **и** $\sqrt[5]{6}$

НОК(3, 5) = 15: $\sqrt[15]{3^5}=\sqrt[15]{243}$ и $\sqrt[15]{6^3}=\sqrt[15]{216}$. $243>216$. **Ответ:** $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{6}$.

17.11 $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}-\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ **при** $1<a<2$

$a\pm 2\sqrt{a-1}=(\sqrt{a-1}\pm 1)^2$. Первый корень: $\sqrt{a-1}+1$. Второй: $|\sqrt{a-1}-1|=1-\sqrt{a-1}$, так как при $a<2$ $\sqrt{a-1}<1$. Разность: $2\sqrt{a-1}$. **Ответ:** $2\sqrt{a-1}$.

17.12 **Решите уравнение** $\sqrt[3]{x+7}=\sqrt{x+3}$

Обе части неотрицательны при $x\geq -3$. Возведём в шестую степень: $(x+7)^2=(x+3)^3$,
$x^3+8x^2+13x-22=0$, $(x-1)(x^2+9x+22)=0$. Дискриминант второго множителя $81-88<0$. Ответ: 1. **Ответ:** 1.

17.13 **Сколько целых корней у уравнения** $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=1$**?**

$t=\sqrt{x+1}\geq 0$: $x+5-4t=(t-2)^2$, $x+10-6t=(t-3)^2$. Уравнение: $|t-2|+|t-3|=1$, оно верно при $2\leq t\leq 3$, то есть $3\leq x\leq 8$. Целых: 3, 4, 5, 6, 7, 8. **Ответ:** 6.

17.14 **Найдите $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$, если $a+a^{-1}=7$.**

$\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=a+2+a^{-1}=9$. Сумма положительна (дробная степень берётся от $a>0$), значит, 3.
Ответ: 3.

★1 **Докажите, что число $\sqrt[3]{2}$ иррационально.**

Пусть $\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}$, дробь несократима. Тогда $p^3=2q^3$, p^3 чётно, значит p чётно: $p=2r$. $8r^3=2q^3$, $q^3=4r^3-q$ тоже чётно. Дробь сократима на 2 — противоречие.

★2 **Что больше: $\sqrt[3]{60}$ или $2+\sqrt[3]{7}$? Калькулятор не нужен.**

Обе части положительны, сравним кубы. $(2+\sqrt[3]{7})^3=8+12\sqrt[3]{7}+6\sqrt[3]{49}+7=15+12\sqrt[3]{7}+6\sqrt[3]{49}$. Нужно сравнить 45 и $12\sqrt[3]{7}+6\sqrt[3]{49}$. Оценим: $1{,}913^3\approx 7{,}0008>7$, значит $\sqrt[3]{7}<1{,}913$ и $\sqrt[3]{49}=\left(\sqrt[3]{7}\right)^2<1{,}913^2<3{,}66$. Тогда $12\sqrt[3]{7}+6\sqrt[3]{49}<22{,}96+21{,}96=44{,}92<45$, то есть $(2+\sqrt[3]{7})^3<60$. Значит, $\sqrt[3]{60}$ больше. **Ответ:** $\sqrt[3]{60}>2+\sqrt[3]{7}$.

★3 **Вычислите $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$**

$AB=81-80=1$, $t^3=18+3t$, $t^3-3t-18=0$, $(t-3)(t^2+3t+6)=0$. Ответ: 3. **Ответ:** 3.

★4 **Найдите значение $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$ (корни продолжаются бесконечно).**

Под первым корнем стоит то же самое число: $x=\sqrt{6+x}$, $x\geq 0$. $x^2-x-6=0$, $x=3$ (корень -2 отрицателен). Последовательность $\sqrt{6}$, $\sqrt{6+\sqrt{6}}$, $\ldots$ возрастает и ограничена числом 3, поэтому имеет предел. **Ответ:** 3.

★5 **Решите уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$**

$u=\sqrt[3]{x+1}$, $v=\sqrt[3]{7-x}$: $u+v=2$, $u^3+v^3=8$. $u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)=8-6uv$, откуда $uv=0$. $u=0\Rightarrow x=-1$; $v=0\Rightarrow x=7$. **Ответ:** $-1;\ 7$.
