ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

Корни и корни n-й степени

От квадратных корней 8–9 класса к базе 10 класса

Ученик:

Формат: крупные задания для печати А4

В каждой теме: теория → пример → 10 заданий → ответы

Тема 1. Квадраты чисел и квадратный корень

Квадрат числа a — это $a^2 = a \cdot a$. Арифметический квадратный корень $\sqrt{a}$ определён при $a \geq 0$ и означает неотрицательное число, квадрат которого равен a. Например, $\sqrt{49} = 7$, потому что $7^2 = 49$.

Пример. $\sqrt{81} = 9$, а $(-9)^2 = 81$. Но арифметический корень $\sqrt{81}$ равен именно 9, не ± 9.

1. Вычисли 7^2.

2. Вычисли 12^2.

3. Вычисли $(-5)^2$.

4. Вычисли $\sqrt{25}$.

5. Вычисли $\sqrt{64}$.

6. Вычисли $\sqrt{121}$.

7. Вычисли $\sqrt{0}$.

8. Вычисли $\sqrt{144}$.

9. Найди число $x \geq 0$, если $x^2 = 169$.

10. Найди $\sqrt{1} + \sqrt{100}$.

Тема 2. Корни и ближайшие целые числа

Если число под корнем не является полным квадратом, можно оценить корень между соседними целыми. Например, $25 < 30 < 36$, значит $5 < \sqrt{30} < 6$. Это помогает сравнивать и проверять ответы.

Пример. Так как $49 < 50 < 64$, то $7 < \sqrt{50} < 8$.

1. Между какими соседними целыми находится $\sqrt{10}$?

2. Между какими соседними целыми находится $\sqrt{20}$?

3. Между какими соседними целыми находится $\sqrt{35}$?

4. Между какими соседними целыми находится $\sqrt{70}$?

5. Сравни: $\sqrt{15}$ и 4.

6. Сравни: $\sqrt{50}$ и 7.

7. Сравни: $\sqrt{80}$ и 9.

8. Расположи по возрастанию: 3, $\sqrt{10}$, 4.

9. Расположи по возрастанию: 5, $\sqrt{24}$, $\sqrt{30}$.

10. Какое целое число ближе к $\sqrt{63}$: 7 или 8?

Тема 3. Вынесение множителя из-под корня

Если под корнем есть полный квадрат, его можно вынести:

$$\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}.$$

В школьных числовых примерах: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$. Ищи самый большой квадратный множитель.

Пример. $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$.

1. Упрости $\sqrt{12}$.

2. Упрости $\sqrt{18}$.

3. Упрости $\sqrt{20}$.

4. Упрости $\sqrt{27}$.

5. Упрости $\sqrt{32}$.

6. Упрости $\sqrt{45}$.

7. Упрости $\sqrt{48}$.

8. Упрости $\sqrt{75}$.

9. Упрости $\sqrt{98}$.

10. Упрости $\sqrt{200}$.

Тема 4. Умножение и деление квадратных корней

При $a \geq 0, b \geq 0$:

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

При $a \geq 0, b > 0$:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

После объединения корней обязательно проверь, можно ли извлечь корень или упростить его.

Пример. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{144} = 12.$

1. Вычисли $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$.

2. Вычисли $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$.

3. Вычисли $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$.

4. Вычисли $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$.

5. Вычисли $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$.

6. Вычисли $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$.

7. Вычисли $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$.

8. Упрости $\sqrt{14} \cdot \sqrt{7}$.

9. Упрости $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$.

10. Упрости $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$.

Тема 5. Сложение и вычитание подобных корней

Складывать напрямую можно только одинаковые корни: $a\sqrt{m}+b\sqrt{m}=(a+b)\sqrt{m}$. Если корни разные, сначала упрости каждый. Например, $\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

Пример. $3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

1. Упрости $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$.

2. Упрости $7\sqrt{2}-3\sqrt{2}$.

3. Упрости $\sqrt{5}+4\sqrt{5}-2\sqrt{5}$.

4. Упрости $\sqrt{8}+\sqrt{2}$.

5. Упрости $\sqrt{18}+\sqrt{2}$.

6. Упрости $\sqrt{12}+\sqrt{27}$.

7. Упрости $\sqrt{20}-\sqrt{5}$.

8. Упрости $2\sqrt{45}-\sqrt{5}$.

9. Упрости $\sqrt{50}+\sqrt{8}$.

10. Упрости $\sqrt{75}-\sqrt{12}$.

Тема 6. Корень в знаменателе и рационализация

В школьных преобразованиях удобно убирать корень из знаменателя. Для дроби $1/\sqrt{a}$ умножаем числитель и знаменатель на $\sqrt{a}$:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Если в числителе есть коэффициент, он сохраняется.

Пример. $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

1. Убери корень из знаменателя: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Убери корень из знаменателя: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Убери корень из знаменателя: $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

4. Убери корень из знаменателя: $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

5. Убери корень из знаменателя: $\frac{5}{\sqrt{10}}$.

6. Упрости $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ и убери корень из знаменателя.

7. Упрости $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$.

8. Упрости $\frac{4}{\sqrt{8}}$ и убери корень из знаменателя.

9. Упрости $\frac{6}{\sqrt{12}}$ и убери корень из знаменателя.

10. Упрости $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$.

Тема 7. Простейшие уравнения с квадратным корнем

Если $\sqrt{x} = a$, то обязательно $a \geq 0$, а после возведения в квадрат получаем $x = a^2$. Для уравнений вида $\sqrt{x+b} = a$ сначала проверяем, что правая часть неотрицательна, затем возводим обе части в квадрат.

Пример. $\sqrt{x+1} = 5 \Rightarrow x+1 = 25 \Rightarrow x = 24$.

1. Реши $\sqrt{x} = 6$.

2. Реши $\sqrt{x} = 11$.

3. Реши $\sqrt{x+3} = 4$.

4. Реши $\sqrt{x-5} = 3$.

5. Реши $\sqrt{2x} = 8$.

6. Реши $\sqrt{3x} = 9$.

7. Реши $\sqrt{x+7} = 0$.

8. Реши $\sqrt{x-1} = 10$.

9. Есть ли решение у $\sqrt{x} = -2$?

10. Реши $2\sqrt{x} = 14$.

Тема 8. Корень n-й степени: смысл и область определения

Число $\sqrt[n]{a}$ — это число, которое при возведении в степень n даёт a. Если n чётное, в действительных числах нужно $a \geq 0$, а арифметический корень неотрицателен. Если n нечётное, корень существует и для отрицательных чисел: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Пример. $\sqrt[4]{16} = 2$, потому что $2^4 = 16$; $\sqrt[3]{-27} = -3$.

1. Вычисли $\sqrt[3]{8}$.

2. Вычисли $\sqrt[3]{27}$.

3. Вычисли $\sqrt[3]{-64}$.

4. Вычисли $\sqrt[4]{16}$.

5. Вычисли $\sqrt[4]{81}$.

6. Вычисли $\sqrt[5]{32}$.

7. Вычисли $\sqrt[5]{-32}$.

8. Существует ли действительное значение $\sqrt[4]{-16}$?

9. Существует ли действительное значение $\sqrt[3]{-125}$? Если да, най-

10. Вычисли $\sqrt[6]{64}$.

Тема 9. Свойства корней n-й степени

Для подходящих значений переменных работают аналогичные свойства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Также можно выносить полный n-й степенной множитель: $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$.

Пример. $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{16 \cdot 2} = 2\sqrt[4]{2}$.

1. Вычисли $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$.

2. Вычисли $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$.

3. Упрости $\sqrt[3]{16}$.

4. Упрости $\sqrt[3]{54}$.

5. Упрости $\sqrt[3]{128}$.

6. Упрости $\sqrt[4]{32}$.

7. Упрости $\sqrt[4]{162}$.

8. Вычисли $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt[3]{2}}$.

9. Вычисли $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt[4]{2}}$.

10. Упрости $\sqrt[5]{96}$.

Тема 10. Дробные показатели степени и уравнения $x^n = a$

Дробная степень связана с корнем:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

В уравнении $x^n = a$: при нечётном n обычно один действительный корень; при чётном n и $a > 0$ — два: $x = \pm\sqrt[n]{a}$.

Пример. $16^{1/4} = \sqrt[4]{16} = 2$. Уравнение $x^4 = 16$ имеет решения $x = \pm 2$.

1. Вычисли $27^{1/3}$.

2. Вычисли $16^{1/4}$.

3. Вычисли $32^{1/5}$.

4. Вычисли $8^{2/3}$.

5. Вычисли $16^{3/4}$.

6. Реши $x^3 = 64$.

7. Реши $x^4 = 81$.

8. Реши $x^5 = -32$.

9. Реши $x^6 = 64$.

10. Реши $x^4 = 0$.

Ответы

Проверяй ответы только после самостоятельного решения. Если ответ не совпал, сначала найди место ошибки, а не переписывай решение.

Тема 1. Квадраты чисел и квадратный корень

1. 49
2. 144
3. 25
4. 5
5. 8
6. 11
7. 0
8. 12
9. 13
10. 11

Тема 2. Корни и ближайшие целые числа

1. $3 < \sqrt{10} < 4$
2. $4 < \sqrt{20} < 5$
3. $5 < \sqrt{35} < 6$
4. $8 < \sqrt{70} < 9$
5. $\sqrt{15} < 4$
6. $\sqrt{50} > 7$
7. $\sqrt{80} < 9$
8. $3 < \sqrt{10} < 4$
9. $\sqrt{24} < 5 < \sqrt{30}$
10. 8

Тема 3. Вынесение множителя из-под корня

1. $2\sqrt{3}$
2. $3\sqrt{2}$
3. $2\sqrt{5}$
4. $3\sqrt{3}$
5. $4\sqrt{2}$
6. $3\sqrt{5}$
7. $4\sqrt{3}$
8. $5\sqrt{3}$
9. $7\sqrt{2}$
10. $10\sqrt{2}$

Тема 4. Умножение и деление квадратных корней

1. 4
2. 6
3. 10
4. 12
5. 5
6. 6
7. 5
8. $7\sqrt{2}$
9. 6
10. 7

Тема 5. Сложение и вычитание подобных корней

1. $7\sqrt{3}$
2. $4\sqrt{2}$
3. $3\sqrt{5}$
4. $3\sqrt{2}$
5. $4\sqrt{2}$
6. $5\sqrt{3}$
7. $\sqrt{5}$
8. $5\sqrt{5}$
9. $7\sqrt{2}$
10. $3\sqrt{3}$

Тема 6. Корень в знаменателе и рационализация

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
3. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
4. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$
5. $\frac{\sqrt{10}}{2}$
6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
7. $\frac{1}{2}$
8. $\sqrt{2}$
9. $\sqrt{3}$
10. $\sqrt{3}$

Тема 7. Простейшие уравнения с квадратным корнем

1. 36
2. 121
3. 13
4. 14
5. 32
6. 27
7. -7
8. 101
9. решений нет
10. 49

Тема 8. Корень n-й степени: смысл и область определения

1. 2
2. 3
3. -4
4. 2
5. 3
6. 2
7. -2
8. нет
9. -5
10. 2

Тема 9. Свойства корней n-й степени

1. 2
2. 5
3. $2\sqrt[3]{2}$
4. $3\sqrt[3]{2}$
5. $4\sqrt[3]{2}$
6. $2\sqrt[4]{2}$
7. $3\sqrt[4]{2}$
8. 3
9. 2
10. $2\sqrt[5]{3}$

Тема 10. Дробные показатели степени и уравнения $x^n = a$

1. 3
2. 2
3. 2
4. 4
5. 8
6. 4
7. $x = \pm 3$
8. -2
9. $x = \pm 2$
10. 0