ЕГЭНИЙ egeniy.ru ФИЗИКА

Тело, брошенное под углом к горизонту

Домашнее задание · от простого до уровня «сложнее ЕГЭ»

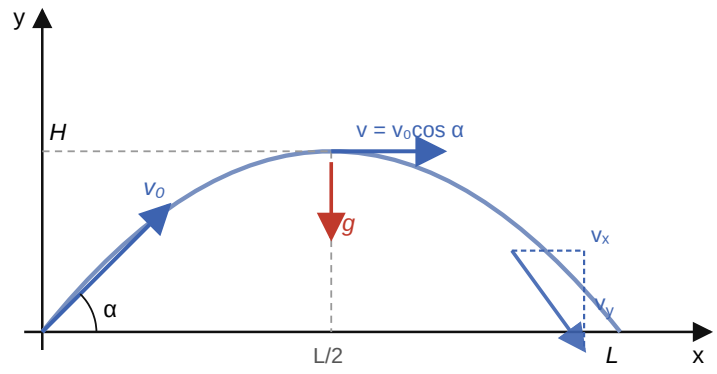
Во всех задачах g = 10 м/с², сопротивление воздуха не учитывать. sin 37° = 0,6; cos 37° = 0,8; sin 53° = 0,8; cos 53° = 0,6.

1. Главная идея

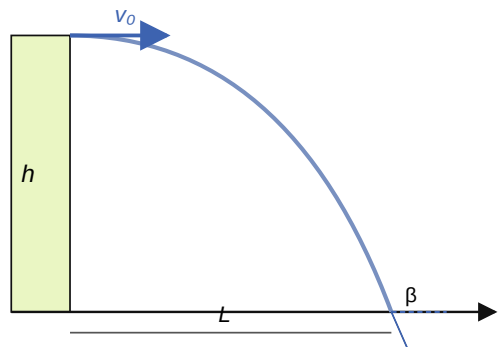
Движение тела, брошенного под углом, раскладывается на два независимых движения:

- **по горизонтали (ось x)** — равномерное: ускорения нет, v_x = const;
- **по вертикали (ось y)** — равноускоренное с ускорением g, направленным вниз (как при броске вертикально вверх).

Время у обоих движений общее. Поэтому план решения почти любой задачи: **найти время из одной оси → подставить в другую**.



Бросок под углом α с земли



Горизонтальный бросок с высоты h

2. Формулы: бросок под углом с поверхности земли

Что ищем	Формула	Комментарий
Проекции начальной скорости	$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$	разложение вектора
Скорость в момент t	$v_x = v_0 \cos\alpha \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt$	v_x не меняется
Модуль скорости	$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	теорема Пифагора
Угол скорости с горизонтом	$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x}$	β > 0 — летит вверх, β < 0 — вниз
Координаты	$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \quad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$	начало координат — точка броска
Время подъёма	$t_{под} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$	в верхней точке $v_y = 0$
Время полёта	$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$	$= 2t_{под}$ (только если старт и финиш на одной высоте)

Максимальная высота	$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$	зависит только от v_{0y}
Дальность полёта	$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = v_0 \cos \alpha \cdot T$	максимум при $\alpha = 45°$
Уравнение траектории	$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$	парабола ветвями вниз

3. Формулы: горизонтальный бросок с высоты h

Что ищем	Формула	Комментарий
Время падения	$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$	не зависит от v_0!
Дальность	$L = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$	
Скорость в момент t	$v_x = v_0 \quad v_y = gt \quad v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$	v_y направлена вниз
Скорость при падении	$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$	
Угол падения	$\operatorname{tg} \beta = \frac{gt}{v_0}$	

4. Общий случай: бросок с высоты h под углом α

Ось y направляем вверх, начало — на земле под точкой броска:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t \qquad y = h + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Момент падения: решаем квадратное уравнение **y = 0** и берём положительный корень. Если тело брошено вниз под углом, то начальная v_y отрицательна: $y = h - v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$.

5. Полезные свойства (экономят время на ЕГЭ)

① В верхней точке скорость не нулевая: $v_{min} = v_0 \cos \alpha$, она направлена горизонтально. Ускорение везде равно g.

② Углы α и 90° − α дают одинаковую дальность (sin 2α одинаков), но разные высоты и время полёта.

③ Траектория симметрична: на одной высоте при подъёме и спуске модуль скорости одинаков, а v_y меняет знак.

④ Связь высоты и дальности: $\frac{H}{L} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{4}$. При $\alpha = 45°$: $L = 4H$.

⑤ Скорость на высоте y (закон сохранения энергии): $v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$. Не зависит от угла броска.

⑥ Для броска с земли $H = \frac{gT^2}{8}$ — высота определяется только временем полёта.

⑦ Радиус кривизны траектории: $R = \frac{v^2}{g_n}$, где g_n — проекция g на нормаль к скорости. В верхней точке $R = \frac{(v_0 \cos\alpha)^2}{g}$.

⑧ Если v_0 увеличить в k раз (угол тот же): T — в k раз, H и L — в k^2 раз.

6. Значения тригонометрических функций

α	30°	37°	45°	53°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	0,6	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,8	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,8	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,6	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$ · $\sqrt{3} \approx 1{,}73$. Если ответ содержит корень, запишите точное значение и приближённое.

7. Разобранные примеры

Пример 1. Горизонтальный бросок

Камень брошен горизонтально с высоты 20 м со скоростью 15 м/с. Найдите время полёта, дальность, скорость при падении и угол падения.

$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 2$ с. $\quad L = v_0 t = 15 \cdot 2 = 30$ м.

$v_y = gt = 20$ м/с, $\quad v = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ м/с. $\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta = 53°$.

Ответ: 2 с; 30 м; 25 м/с; 53° к горизонту.

Пример 2. Бросок под углом с земли

Мяч брошен со скоростью 30 м/с под углом 30° к горизонту. Найдите время полёта, максимальную высоту и дальность.

$v_{0x} = 30 \cdot \cos 30° = 15\sqrt{3}$ м/с, $\quad v_{0y} = 30 \cdot \sin 30° = 15$ м/с.

$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2 \cdot 15}{10} = 3$ с. $\quad H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{225}{20} = 11{,}25$ м. $\quad L = v_{0x} \cdot T = 45\sqrt{3} \approx 77{,}9$ м.

Ответ: 3 с; 11,25 м; $45\sqrt{3} \approx 77{,}9$ м.

Пример 3. Скорость и координаты в произвольный момент

Тело брошено со скоростью 20 м/с под углом 53° к горизонту. Найдите скорость тела и его координаты через 0,7 с после броска.

$v_x = 20 \cdot 0{,}6 = 12$ м/с, $v_{0y} = 20 \cdot 0{,}8 = 16$ м/с.

$v_y = 16 - 10 \cdot 0{,}7 = 9$ м/с, $v = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ м/с, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{9}{12} \Rightarrow \beta = 37°$ (тело ещё поднимается).

$x = 12 \cdot 0{,}7 = 8{,}4$ м, $y = 16 \cdot 0{,}7 - \dfrac{10 \cdot 0{,}7^2}{2} = 11{,}2 - 2{,}45 = 8{,}75$ м.

Ответ: 15 м/с под углом 37° к горизонту; (8,4 м; 8,75 м).

Пример 4. Бросок с высоты под углом

С балкона высотой 15 м бросили мяч со скоростью $10\sqrt{2}$ м/с под углом 45° вверх к горизонту. Через какое время и на каком расстоянии от дома мяч упадёт? С какой скоростью?

$v_x = v_{0y} = 10\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 10$ м/с.

$y = 15 + 10t - 5t^2 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3$ с (корень $t = -1$ не подходит).

$L = 10 \cdot 3 = 30$ м.

Скорость при падении (свойство ⑤): $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{200 + 300} = 10\sqrt{5} \approx 22{,}4$ м/с.

Ответ: 3 с; 30 м; $10\sqrt{5} \approx 22{,}4$ м/с.

Пример 5. Уровень ЕГЭ: тело дважды на одной высоте

Тело, брошенное с земли под углом к горизонту, дважды побывало на высоте 15 м с интервалом 2 с. Найдите максимальную высоту подъёма.

Из $y = v_{0y}t - 5t^2 = 15$ получаем два момента t_1 и t_2. По симметрии от высоты 15 м до верхней точки тело летит 1 с, значит на высоте 15 м $v_y = g \cdot 1 = 10$ м/с.

По свойству ⑤ для вертикали: $v_{0y}^2 = v_y^2 + 2gh = 100 + 300 = 400 \Rightarrow v_{0y} = 20$ м/с. $H = \dfrac{400}{20} = 20$ м.

Ответ: 20 м.

8. Задачи для самостоятельного решения

Уровень 1. Горизонтальный бросок

1.1 Камень брошен горизонтально с высоты 80 м со скоростью 12 м/с. Найдите время полёта и дальность полёта.

1.2 Мяч брошен горизонтально с высоты 45 м и упал на расстоянии 24 м от точки бросания (по горизонтали). Найдите начальную скорость мяча.

1.3 Тело брошено горизонтально со скоростью 6 м/с с высоты 3,2 м. С какой скоростью оно упадёт на землю?

1.4 Тело, брошенное горизонтально, упало на землю через 0,8 с. С какой высоты его бросили?

1.5 Тело брошено горизонтально со скоростью 10 м/с. Найдите модуль скорости через 1 с полёта и угол, который она составляет с горизонтом.

1.6 Мяч скатился со стола высотой 1,25 м и упал на пол на расстоянии 2 м от края стола. С какой скоростью мяч слетел со стола?

1.7 Из ружья, расположенного горизонтально, выпустили две пули со скоростями 200 м/с и 400 м/с. Во сколько раз отличаются их времена полёта до земли и дальности полёта?

1.8 Самолёт летит горизонтально на высоте 500 м со скоростью 100 м/с. На каком расстоянии от цели (по горизонтали) лётчик должен сбросить груз, чтобы попасть в неё?

Уровень 2. Бросок под углом: основные формулы

2.1 Тело брошено со скоростью 20 м/с под углом 30° к горизонту. Найдите горизонтальную и вертикальную проекции начальной скорости.

2.2 Для тела из задачи 2.1 найдите время подъёма, время полёта, максимальную высоту и дальность полёта.

2.3 Камень брошен со скоростью 10 м/с под углом 45° к горизонту. Найдите дальность, максимальную высоту и время полёта.

2.4 Мяч брошен со скоростью 25 м/с под углом 37° к горизонту. Найдите время полёта, максимальную высоту и дальность.

2.5 Снаряд вылетел со скоростью 50 м/с под углом 53° к горизонту. Найдите время полёта, максимальную высоту и дальность.

2.6 Скорость тела в верхней точке траектории равна 20 м/с, время полёта 3 с. Найдите начальную скорость и угол бросания.

2.7 Как изменятся время полёта, максимальная высота и дальность полёта, если начальную скорость увеличить в 2 раза, а угол оставить прежним?

2.8 Тело брошено под углом 30° к горизонту. Под каким другим углом нужно бросить его с той же скоростью, чтобы дальность не изменилась? Во сколько раз при этом будет отличаться максимальная высота?

Уровень 3. Скорость и координаты в любой момент

3.1 Тело брошено со скоростью 25 м/с под углом 53° к горизонту. Найдите модуль скорости и координаты тела через 1,2 с и через 2,8 с после броска. Объясните, почему некоторые величины совпали.

3.2 Для тела из задачи 3.1 найдите, в какие моменты времени скорость направлена под углом 45° к горизонту.

3.3 Тело брошено со скоростью 40 м/с под углом 60° к горизонту. Найдите наименьшую скорость тела за время полёта. В какой точке траектории она достигается?

3.4 Тело брошено с земли со скоростью 30 м/с под углом 60° к горизонту. На какой высоте его скорость равна 20 м/с?

3.5 Тело брошено со скоростью 20 м/с под углом 45° к горизонту. Запишите уравнение траектории $y(x)$. Найдите высоту тела при $x = 20$ м и дальность полёта.

3.6 Движение тела задано уравнениями $x = 12t$, $y = 16t - 5t^2$ (всё в СИ). Найдите начальную скорость, угол бросания, время полёта, максимальную высоту и дальность.

3.7 Найдите отношение максимальной высоты к дальности полёта при угле бросания 45°. При каком угле бросания высота подъёма равна дальности полёта?

Уровень 4. Формат ЕГЭ, часть 1

4.1 С башни высотой 20 м бросили камень со скоростью 25 м/с под углом 37° к горизонту вверх. Найдите время полёта и расстояние от башни до места падения.

4.2 С высоты 15 м бросили тело со скоростью 10 м/с. С какой скоростью оно упадёт на землю? Зависит ли ответ от направления броска?

4.3 С обрыва бросили камень со скоростью 10 м/с под углом 37° к горизонту вниз. Камень упал через 2 с. Найдите высоту обрыва и расстояние от обрыва до места падения.

4.4 Мяч брошен с земли со скоростью 20 м/с под углом 53° к горизонту в стену, которая находится на расстоянии 24 м. Через какое время и на какой высоте мяч ударится о стену? Мяч в этот момент поднимается или опускается?

4.5 Тело бросили с высоты 25 м со скоростью 25 м/с под углом 53° к горизонту вверх. Найдите время полёта и дальность полёта.

4.6 Снаряд вылетает со скоростью 40 м/с под углом 45° к горизонту. Перелетит ли он стену высотой 35 м, стоящую на расстоянии 80 м от орудия? На какой высоте он пролетит над стеной?

4.7 Угол бросания тела увеличили с 30° до 45°, модуль начальной скорости оставили прежним. Как изменятся: А) время полёта; Б) максимальная высота; В) проекция скорости на горизонтальную ось; Г) ускорение тела? Для каждой величины укажите цифру: 1 — увеличится, 2 — уменьшится, 3 — не изменится. Ответ запишите последовательностью цифр.

4.8 Два тела брошены с одинаковыми по модулю скоростями под углами 30° и 60° к горизонту. Найдите отношения времён полёта T_2/T_1, максимальных высот H_2/H_1 и дальностей L_2/L_1.

Уровень 5. Формат ЕГЭ, часть 2

5.1 Через 0,5 с после броска с земли скорость мяча направлена под углом 37° к горизонту, а её горизонтальная проекция равна 20 м/с. Найдите начальную скорость, угол бросания и дальность полёта.

5.2 Мяч брошен со скоростью 25 м/с под углом 53° к горизонту в вертикальную стену, находящуюся на расстоянии 15 м. На какой высоте мяч ударится о стену? Удар абсолютно упругий. На каком расстоянии от стены мяч упадёт на землю?

5.3 Тело брошено горизонтально. Через 1 с после броска его скорость направлена под углом 45° к горизонту, а в момент падения — под углом 60°. Найдите начальную скорость, высоту броска и дальность полёта.

5.4 Тело, брошенное с земли под углом к горизонту, дважды побывало на высоте 15 м с интервалом 2 с. Найдите время полёта и максимальную высоту.

5.5 Тело брошено горизонтально с высоты 20 м. В момент падения его скорость направлена под углом 45° к горизонту. Найдите начальную скорость и дальность полёта.

5.6 Из одной точки одновременно бросили два тела: первое вертикально вверх со скоростью 20 м/с, второе со скоростью 40 м/с под углом 30° к горизонту. Найдите расстояние между телами через 1 с. Какое тело упадёт раньше? Найдите расстояние между точками падения.

5.7 Начальная скорость тела в 2 раза больше его скорости в верхней точке траектории. Найдите угол бросания. Найдите начальную скорость, если максимальная высота подъёма 15 м.

Уровень 6. Сложнее ЕГЭ

6.1 С вершины склона, наклонённого под углом 37° к горизонту, горизонтально бросают камень со скоростью 8 м/с. Через какое время камень упадёт на склон? На каком расстоянии от точки броска (вдоль склона)?

6.2 Тело брошено со скоростью 20 м/с под углом 60° к горизонту. Найдите радиус кривизны траектории в верхней точке и в момент броска.

6.3 Мяч нужно забросить с земли в точку, находящуюся на высоте 15 м и на расстоянии 20 м по горизонтали. Найдите минимальную начальную скорость и угол, под которым нужно бросить мяч. *Подсказка: при минимальной скорости $\operatorname{tg}\alpha = (y + r)/x$, где r — расстояние до цели.*

6.4 С высоты 15 м бросают камень со скоростью 10 м/с. Под каким углом к горизонту нужно его бросить, чтобы дальность полёта была максимальной? Чему она равна? Сравните с броском под 45°.

6.5 Ружьё на земле нацелено точно в мишень, висящую на высоте 45 м на расстоянии 60 м по горизонтали. В момент выстрела мишень начинает свободно падать. Пуля вылетает со скоростью 50 м/с. Попадёт ли пуля в мишень? Если да, то через какое время и на какой высоте? При какой наименьшей скорости пули попадание ещё возможно (до удара мишени о землю)?

6.6 Поезд движется со скоростью 10 м/с. Пассажир бросает из окна камень назад под углом 60° к горизонту со скоростью 20 м/с относительно поезда. Как движется камень относительно земли? Найдите максимальную высоту подъёма над точкой броска и расстояние, на которое за время полёта камня (до возвращения на исходную высоту) сместится поезд.

6.7 Тело брошено со скоростью 25 м/с под углом 53° к горизонту. Через какое время вектор скорости станет перпендикулярен вектору начальной скорости?

6.8 ★ Тело брошено под углом α к горизонту. При каких углах расстояние от тела до точки бросания всё время полёта только увеличивается? *Подсказка: исследуйте знак производной r^2 по времени.*

Ответы

№	Ответ
Уровень 1. Горизонтальный бросок	
1.1	t = 4 с; L = 48 м
1.2	8 м/с
1.3	10 м/с
1.4	3,2 м
1.5	$10\sqrt{2} \approx 14{,}1$ м/с; 45° к горизонту (вниз)
1.6	4 м/с
1.7	времена равны ($t_1 : t_2 = 1$); дальность второй пули в 2 раза больше
1.8	1000 м (время падения 10 с)
Уровень 2. Бросок под углом: основные формулы	
2.1	$v_x = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ м/с; $v_y = 10$ м/с
2.2	$t_{под} = 1$ с; T = 2 с; H = 5 м; $L = 20\sqrt{3} \approx 34{,}6$ м
2.3	L = 10 м; H = 2,5 м; $T = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ с
2.4	T = 3 с; H = 11,25 м; L = 60 м
2.5	T = 8 с; H = 80 м; L = 240 м
2.6	$v_0 = 25$ м/с; $\alpha = 37°$ ($\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$)
2.7	T — в 2 раза; H — в 4 раза; L — в 4 раза (все увеличатся)
2.8	60°; высота в 3 раза больше
Уровень 3. Скорость и координаты в любой момент	
3.1	в обоих случаях v = 17 м/с; (18 м; 16,8 м) и (42 м; 16,8 м). Моменты 1,2 с и 2,8 с симметричны относительно $t_{под} = 2$ с, поэтому высота и модуль скорости совпадают
3.2	t = 0,5 с (на подъёме) и t = 3,5 с (на спуске)
3.3	20 м/с, в верхней точке траектории
3.4	25 м (ответ не зависит от угла)
3.5	$y = x - \frac{x^2}{40}$; y(20) = 10 м (это верхняя точка); L = 40 м
3.6	$v_0 = 20$ м/с; $\alpha = 53°$; T = 3,2 с; H = 12,8 м; L = 38,4 м
3.7	H : L = 1 : 4; $\operatorname{tg}\alpha = 4$, $\alpha \approx 76°$
Уровень 4. Формат ЕГЭ, часть 1	
4.1	t = 4 с; L = 80 м
4.2	20 м/с; не зависит
4.3	h = 32 м; L = 16 м
4.4	через 2 с на высоте 12 м; опускается ($t_{под} = 1{,}6$ с)

4.5	$T = 5$ с; $L = 75$ м
4.6	перелетит; на высоте 40 м (на 5 м выше стены)
4.7	1123
4.8	$T_2/T_1 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$; $H_2/H_1 = 3$; $L_2/L_1 = 1$
Уровень 5. Формат ЕГЭ, часть 2	
5.1	$v_0 = 20\sqrt{2} \approx 28{,}3$ м/с; $\alpha = 45°$; $L = 80$ м
5.2	на высоте 15 м; в 45 м от стены, т. е. в 30 м позади точки броска
5.3	$v_0 = 10$ м/с; $h = 15$ м; $L = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ м
5.4	$T = 4$ с; $H = 20$ м
5.5	$v_0 = 20$ м/с; $L = 40$ м
5.6	$20\sqrt{3} \approx 34{,}6$ м; упадут одновременно (через 4 с); $80\sqrt{3} \approx 138{,}6$ м
5.7	$\alpha = 60°$; $v_0 = 20$ м/с
Уровень 6. Сложнее ЕГЭ	
6.1	$t = 1{,}2$ с; 12 м
6.2	$R_{верх} = 10$ м; $R_0 = 80$ м
6.3	$v_{min} = 20$ м/с; $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha \approx 63{,}4°$
6.4	$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$, $\alpha \approx 26{,}6°$; $L_{max} = 20$ м (при 45° дальность меньше: ≈ 18,2 м)
6.5	попадёт; через 1,5 с на высоте 33,75 м; $v_{min} = 25$ м/с
6.6	относительно земли камень летит вертикально вверх ($v_x = 0$); $H = 15$ м; поезд сместится на $20\sqrt{3} \approx 34{,}6$ м
6.7	$t = 3{,}125$ с (успевает до падения: $T = 4$ с)
6.8	$\sin\alpha \le \frac{2\sqrt{2}}{3}$, т. е. $\alpha \le 70{,}5°$