ЕГЭНИЙ · БЕСПЛАТНАЯ ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

# Вероятность и уравнения: задания №5 и №13

ЕГЭ, профильная математика

Занятие · 90 мин | Домашнее задание · 120 мин | От простого к сложному

| Занятие · 90 минут | | Домашнее задание · 120 минут | |
|---|---|---|---|
| Шпаргалка и примеры №5 | 8 мин | №5 · проще (1–5) | 8 мин |
| №5 · задания 1–12 | 34 мин | №5 · уровень ЕГЭ (6–13) | 28 мин |
| Шпаргалка и пример №13 | 8 мин | №5 · сложнее (14–15) | 14 мин |
| №13 · задания 13–20 | 40 мин | №13 · задания 16–25 | 70 мин |

В каждом блоке три уровня: **проще** (разогрев на один шаг), **уровень ЕГЭ** (как в реальном варианте), **сложнее** (с подвохом). Время ориентировочное.

ТЕОРИЯ

## Задание №5. Теория вероятностей

**Шпаргалка · задание №5**

**Противоположное событие:** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

**«Хотя бы один»** = 1 − P(ни одного).

**Несовместные** (вместе произойти не могут): P(A или B) = P(A) + P(B).

**Совместные:** P(A или B) = P(A) + P(B) − P(A и B).

**Независимые:** P(A и B) = P(A) · P(B).

**Полная вероятность** (две «гипотезы» $H_1$, $H_2$): $P(A) = P(H_1)\cdot P(A \mid H_1) + P(H_2)\cdot P(A \mid H_2)$.

**Условная вероятность** («известно, что A произошло»): $P(H_1 \mid A) = \dfrac{P(H_1)\cdot P(A \mid H_1)}{P(A)}$.

**Ровно $k$ успехов из $n$** независимых попыток: $C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, $q = 1 - p$, $C_3^2 = 3$.

**Алгоритм.** 1) Назови события словами. 2) Связка «и» → умножаем, «или» → складываем. 3) Проверь: события независимы? несовместны? 4) Если вариантов много, нарисуй дерево и сложи нужные ветки.

**Пример 1. «Хотя бы один»**

Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8. Он стреляет 3 раза. Найдите вероятность хотя бы одного попадания.

> Промах: 1 − 0,8 = 0,2. Три промаха подряд (выстрелы независимы): 0,2 · 0,2 · 0,2 = 0,008.
> Хотя бы одно попадание: 1 − 0,008 = **0,992**.

**Пример 2. Формула полной вероятности**

Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для фар. Первая выпускает 45% стёкол, вторая 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стёкол, вторая 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное стекло окажется бракованным.

> Дерево: «с первой фабрики и брак» 0,45 · 0,03 = 0,0135; «со второй и брак» 0,55 · 0,01 = 0,0055.
> Ветки несовместны, складываем: 0,0135 + 0,0055 = **0,019**.

**Пример 3. Вложенные события**

Вероятность того, что ученик решит больше 7 задач, равна 0,73. Вероятность того, что он решит больше 8 задач, равна 0,67. Найдите вероятность того, что он решит ровно 8 задач.

> Событие «больше 7» = «ровно 8» или «больше 8», эти варианты несовместны.
> P(ровно 8) = 0,73 − 0,67 = **0,06**.

ТЕОРИЯ

# Задание №13. Тригонометрические уравнения

**Шпаргалка · задание №13**

**Простейшие уравнения** ($n \in Z$):

$\sin x = a$: $x = \arcsin a + 2\pi n$,
$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$;

$\cos x = a$: $x = \pm \arccos a + 2\pi n$;

$\operatorname{tg} x = a$: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$.

**Частные случаи:**

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n$; $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$;

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n$.

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | −1 |
| $\operatorname{tg} x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — | 0 |

**Формулы:**

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

**Приведение:** при $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ функция меняется (sin ↔ cos), при π и 2π сохраняется; знак — как у исходной функции в нужной четверти. Например:

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$,

$\sin(\pi + x) = -\sin x$.

**Три приёма:** 1) свести к квадратному уравнению относительно $\sin x$ или $\cos x$; 2) вынести общий множитель (делить на выражение с $x$ нельзя — потеряешь корни); 3) учесть ОДЗ: корень, знаменатель, логарифм.

**Отбор корней:** двойное неравенство $a \le x_0 + 2\pi n \le b$, перебор $n$ или единичная окружность.

**Как оценивают.** 2 балла — обоснованно решены оба пункта. 1 балл — верно решён пункт а) или в обоих пунктах верный ход решения с вычислительной ошибкой. Ответ в пункте а) записывай сериями, в пункте б) — числами.

**Пример. Полное решение задания №13**

а) Решите уравнение $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$. б) Найдите корни на отрезке $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

а) Заменим $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$: $2 - 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, то есть $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

Пусть $t = \cos x$: $2t^2 - t - 1 = 0$, $t = 1$ или $t = -\frac{1}{2}$.

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n$; $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

б) Серия $2\pi n$: $-\frac{5\pi}{2} \le 2\pi n \le -\pi \Rightarrow -1{,}25 \le n \le -0{,}5 \Rightarrow n = -1$, $x = -2\pi$.

Серия $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$: при $n = -1$ получаем $-\frac{4\pi}{3}$ — подходит ($-2{,}5\pi \le -1{,}33\pi \le -\pi$).

Серия $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$: при $n = -1$ получаем $-\frac{8\pi}{3} < -\frac{5\pi}{2}$, при $n = 0$ получаем $-\frac{2\pi}{3} > -\pi$ — не подходят.

**Ответ:** а) $2\pi n$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $-2\pi$; $-\frac{4\pi}{3}$.

## Занятие

90 минут · задания 1–20

ЗАДАНИЕ №5

# Вероятность сложных событий

**ПРОЩЕ** ≈ 6 мин

**1** Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что все три раза выпадет орёл.

**2** В зале два кофейных автомата. Каждый из них независимо от другого неисправен с вероятностью 0,1. Найдите вероятность того, что оба автомата неисправны.

**3** В магазине два продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3 независимо от другого. Найдите вероятность того, что оба продавца заняты.

**4** Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,04. Покупатель берёт две батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки исправны.

**УРОВЕНЬ ЕГЭ** ≈ 18 мин

**5** Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что чайник прослужит меньше двух лет, но больше года.

**6** Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8. Найдите вероятность того, что, сделав 4 выстрела, он первые три раза попадёт, а последний раз промахнётся.

**7** Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая выпускает 35% стёкол, вторая 65%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стёкол, вторая 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное стекло окажется бракованным.

**8** Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Лампы перегорают независимо. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

**9** Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два раза промахнулся.

**10** Если шахматист А. играет белыми, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет чёрными, то выигрывает с вероятностью 0,3. Они играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

**СЛОЖНЕЕ** ≈ 10 мин

**11** Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Из непристрелянного он попадает с вероятностью 0,2. На столе лежат 10 револьверов, из них 4 пристрелянных. Джон берёт случайный револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

**12** В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, и погода, установившись утром, держится весь день. С вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как сегодня. 3 июля погода хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля будет отличная погода.

ЗАДАНИЕ №13

## Уравнения с отбором корней

В заданиях 13–16 решите уравнение; ответ запишите сериями.

**ПРОЩЕ** ≈ 8 мин

**13** $\sin x = \frac{1}{2}$

**14** $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**15** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

**16** $2\cos x - 1 = 0$

**17** Найдите все корни уравнения $\sin x = 0$ на отрезке $[-\pi; 2\pi]$.

**УРОВЕНЬ ЕГЭ** ≈ 20 мин

**18** а) Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.

**19** а) Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

**СЛОЖНЕЕ** ≈ 12 мин

**20** а) Решите уравнение $(2\sin x - 1)\cdot\sqrt{-\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

Подсказка к №20: сначала выпиши ОДЗ. Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а другой при этом определён.

# Домашнее задание

120 минут · задания 1–25

Перед началом перечитай шпаргалки и разобранные примеры. В №13 оформляй решение полностью, как на экзамене: пункт а) и отбор корней в пункте б).

ЗАДАНИЕ №5

## Вероятность сложных событий

**ПРОЩЕ** ≈ 8 мин

**1** Монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что все четыре раза выпадет решка.

**2** Вероятность того, что ручка пишет плохо, равна 0,1. Покупатель берёт две ручки. Найдите вероятность того, что обе ручки пишут хорошо.

**3** Вероятность дождя в субботу равна 0,4, в воскресенье тоже 0,4, и погода в эти дни независима. Найдите вероятность того, что в оба дня дождя не будет.

**4** В приборе две лампы, каждая перегорает за год с вероятностью 0,2 независимо от другой. Найдите вероятность того, что за год перегорят обе лампы.

**5** Вероятность выбить «десятку» одним выстрелом равна 0,3. Сделано два выстрела. Найдите вероятность того, что ни разу «десятка» не выбита.

**УРОВЕНЬ ЕГЭ** ≈ 28 мин

**6** Вероятность того, что новый принтер прослужит больше года, равна 0,95. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,81. Найдите вероятность того, что принтер прослужит меньше двух лет, но больше года.

**7** Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,7. Найдите вероятность того, что, сделав 3 выстрела, он первые два раза попадёт, а третий раз промахнётся.

**8** Две фабрики выпускают одинаковые детали. Первая выпускает 70% деталей, вторая 30%. У первой фабрики 2% деталей бракованные, у второй 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранная деталь окажется бракованной.

**9** Система безопасности содержит три независимых датчика. Каждый срабатывает при угрозе с вероятностью 0,9. Найдите вероятность того, что при угрозе сработает хотя бы один датчик.

**10** Если шахматист играет белыми, он выигрывает у соперника с вероятностью 0,6, если чёрными — с вероятностью 0,4. Сыграны две партии, во второй цвет фигур поменяли. Найдите вероятность того, что шахматист выиграет обе партии.

**11** В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

**12** Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20%. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

**13** Три стрелка стреляют по одной мишени, каждый делает один выстрел. Каждый попадает с вероятностью 0,6 независимо от других. Найдите вероятность того, что в мишень попадут ровно два стрелка.

**СЛОЖНЕЕ** ≈ 14 мин

**14** На заводе два станка. Первый выпускает 60% всех деталей, из них 2% бракованных. Второй выпускает 40% деталей, из них 3% бракованных. Случайно взятая деталь оказалась бракованной. Найдите вероятность того, что она изготовлена на первом станке.

**15** Стрелок в тире попадает в мишень с вероятностью 0,6 при каждом выстреле. Какое наименьшее число выстрелов нужно сделать, чтобы вероятность хотя бы одного попадания была не меньше 0,98?

ЗАДАНИЕ №13

## Уравнения с отбором корней

В заданиях 16–19 и 21 решите уравнение; ответ запишите сериями.

**ПРОЩЕ** ≈ 12 мин

**16** $\cos x = \frac{1}{2}$

**17** $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**18** $\operatorname{tg} x = 1$

**19** $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

**20** Найдите все корни уравнения $\cos x = 0$ на отрезке $[0; 3\pi]$.

**21** $\sin 2x = 1$

**УРОВЕНЬ ЕГЭ** ≈ 39 мин

**22** а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

**23** а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

**24** а) Решите уравнение $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$.

**СЛОЖНЕЕ** ≈ 19 мин

**25** а) Решите уравнение $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

# Ответы

для преподавателя · $n \in Z$ во всех сериях

## Занятие · №5

| | |
|---|---|
| 1 | 0,125 |
| 2 | 0,01 |
| 3 | 0,09 |
| 4 | 0,9216 |
| 5 | 0,06 |
| 6 | 0,1024 |
| 7 | 0,027 |
| 8 | 0,91 |
| 9 | 0,02048 |
| 10 | 0,156 |
| 11 | 0,52 |
| 12 | 0,392 |

## Домашнее задание · №5

| | |
|---|---|
| 1 | 0,0625 |
| 2 | 0,81 |
| 3 | 0,36 |
| 4 | 0,04 |
| 5 | 0,49 |
| 6 | 0,14 |
| 7 | 0,147 |
| 8 | 0,023 |
| 9 | 0,999 |
| 10 | 0,24 |
| 11 | 0,52 |
| 12 | 0,75 |
| 13 | 0,432 |
| 14 | 0,5 |
| 15 | 5 |

## Занятие · №13

| | |
|---|---|
| 13 | $\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ |
| 14 | $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ |
| 15 | $-\frac{\pi}{3} + \pi n$ |
| 16 | $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ |
| 17 | $-\pi;\ 0;\ \pi;\ 2\pi$ |
| 18 | а) $\pi + 2\pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\pi;\ \frac{4\pi}{3}$ |
| 19 | а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $-\frac{7\pi}{2};\ -\frac{10\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{2}$ |
| 20 | а) $\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ (корень $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ не входит в ОДЗ: $\cos x > 0$); б) $-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{7\pi}{6};\ -\frac{\pi}{2}$ |

## Домашнее задание · №13

| | |
|---|---|
| 16 | $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ |
| 17 | $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ |
| 18 | $\frac{\pi}{4} + \pi n$ |
| 19 | $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ |

| | |
|---|---|
| **20** | $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$ |
| **21** | $\frac{\pi}{4} + \pi n$ |
| **22** | а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; б) $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$ |
| **23** | а) $\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; б) $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}; -\pi$ |
| **24** | а) $\pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n$; б) $2\pi; \frac{7\pi}{3}; 3\pi$ |
| **25** | а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}$ |

Серии можно записывать в другой равносильной форме: например, $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ — это то же, что $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$.