ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

ЕГЭ-2027 · ПРОФИЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Вся стереометрия

С нуля до второй части

Призмы, пирамиды, тела вращения, сечения
и доказательства — в одной рабочей тетради.

22 темы | 88 упражнений | 6 задач с пунктами а–б

НОМЕРА ЗАДАНИЙ

В проекте ФИПИ-2027 стереометрия — №3 и №15. Эта тетрадь охватывает геометрию в пространстве: от базовых понятий и вычислений до доказательства и расчёта во второй части.

КАК ЗАНИМАТЬСЯ

На тему — ориентировочно 60–90 минут: теория и пример, затем четыре задания. Первые два можно разобрать на уроке, последние два — решить самостоятельно. Если тема новая, раздели её на два занятия. Итоговая задача — 35–50 минут.

Сначала попытка → затем подсказка → затем разбор.

Задачи авторские. Решения всех упражнений находятся после практики; краткие ответы — в конце. В HTML есть поля для своих решений и раскрывающиеся подсказки.

Ученик: _____
Начало: _____ Завершение: _____

ПРОГРАММА · 22 ТЕМЫ

От первых чертежей к доказательству

01	Как читать пространственный чертёж
02	Куб и прямоугольный параллелепипед
03	Прямые: параллельные, пересекающиеся, скрещивающиеся
04	Параллельность прямой и плоскости
05	Параллельные плоскости и параллельные сечения
06	Перпендикулярность прямой и плоскости
07	Проекция, наклонная и три перпендикуляра
08	Призма и её объём
09	Поверхность призмы и параллелепипеда
10	Правильная пирамида: высота, ребро, апофема
11	Объём, поверхность и подобные пирамиды
12	Правильный тетраэдр
13	Цилиндр
14	Конус и усечённый конус
15	Сфера, шар и сечения
16	Угол между прямыми
17	Угол между прямой и плоскостью
18	Двугранный угол и угол между плоскостями
19	Расстояние от точки до плоскости
20	Расстояние между прямыми
21	Построение и площадь сечений
22	Координаты, уравнение плоскости и оформление

Обозначения: ∠ — угол; ∥ — параллельны; ⊥ — перпендикулярны; D∈BC — точка D на отрезке BC; S — площадь; V — объём; h — высота; l — апофема или образующая; α — плоскость; A1 — вершина второго основания.
На чертеже отмечай только данное или доказанное. Длины положительны, площади измеряются в квадратных единицах. Во второй части нужны обоснования.

ПОВТОРИ ПЕРЕД ПЕРВОЙ ТЕМОЙ

0 База перед стереометрией

Прямоугольный треугольник

Катеты образуют прямой угол; гипотенуза лежит напротив него и является самой длинной стороной. Теорема Пифагора: $c^2=a^2+b^2$. Для неизвестного катета: $a=\sqrt{(c^2-b^2)}$. Пример: катеты 5 и 12 дают гипотенузу 13. Высота к гипотенузе равна $\frac{ab}{c}$: это следует из двух способов вычислить площадь.

Площади, которые понадобятся

Треугольник: $S=\frac{ah}{2}$, где h перпендикулярна стороне a. Прямоугольник: $S=ab$. Параллелограмм: $S=ah$. Трапеция: $S=(a+b)\frac{h}{2}$. Круг: $S=\pi R^2$. Равносторонний треугольник: $h=a\sqrt{\frac{3}{2}}$, $S=a^2\sqrt{\frac{3}{4}}$. В квадрате диагональ $a\sqrt{2}$, расстояние от центра до стороны $\frac{a}{2}$, до вершины $a\sqrt{\frac{2}{2}}$.

Подобие и средняя линия

Средняя линия треугольника соединяет середины двух сторон, параллельна третьей стороне и вдвое короче её. Подобные фигуры имеют равные соответствующие углы, а длины отличаются в k раз. Площади отличаются в k^2 раз; объёмы подобных тел — в k^3 раз. При $k=\frac{1}{2}$ площадь уменьшается в 4 раза, объём — в 8.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ

Катеты 9 и 12. Найди гипотенузу. Сторона равностороннего треугольника 4. Найди площадь. Подобное тело увеличено в 3 раза по каждой длине: во сколько раз вырос объём?

Ответы: 15; $4\sqrt{3}$; в 27 раз.

0

ПОВТОРИ ПЕРЕД ПЕРВОЙ ТЕМОЙ

База перед стереометрией

Синус, косинус и тангенс

Для острого угла φ прямоугольного треугольника: $\sin\varphi$ — противолежащий катет / гипотенуза; $\cos\varphi$ — прилежащий катет / гипотенуза; $\operatorname{tg}\varphi$ — противолежащий катет / прилежащий. Сначала отметь угол и найди гипотенузу, затем выбирай отношение. $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$.

Три основных угла

Для 30°: $\sin=\frac{1}{2}$, $\cos=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\operatorname{tg}=1/\sqrt{3}$. Для 45°: $\sin=\cos=\sqrt{\frac{2}{2}}$, $\operatorname{tg}=1$. Для 60°: $\sin=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\cos=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}=\sqrt{3}$. Пример: высота 3 и наклонная 6 дают $\sin\varphi=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, значит угол наклонной с плоскостью равен 30°. Для произвольного треугольника полезна теорема косинусов: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

Корни, единицы и порядок решения

$\sqrt{(ab)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ для $a,b\geq 0$. Например, $\sqrt{72}=6\sqrt{2}$. Из $x^2=36$ для длины берём $x=6$. Ответ $1/\sqrt{3}$ можно записать как $\sqrt{\frac{3}{3}}$. Длины измеряются в см, площади в см², объёмы в см³. Выпиши данное → построй чертёж → обоснуй плоский треугольник → вычисли → проверь вопрос и единицы.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ

В прямоугольном треугольнике противолежащий углу катет равен 5, гипотенуза 10. Найди угол. Упрости $\sqrt{48}$. Площадь основания 12 см², высота призмы 5 см: чему равен объём?

Ответы: 30°; $4\sqrt{3}$; 60 см³.

01

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Как читать пространственный чертёж

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Стереометрия изучает фигуры в пространстве. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. Плоскость обозначают тремя такими точками или греческой буквой. Если две точки прямой принадлежат плоскости, вся прямая лежит в ней. Две различные плоскости при наличии общей точки пересекаются по прямой. На рисунке скрытые рёбра изображаются пунктиром. Искажение перспективы не меняет заданных длин и углов.

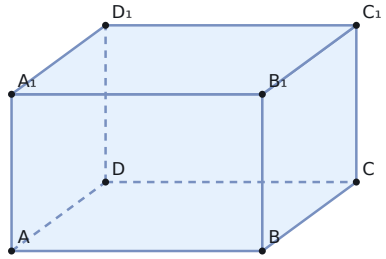

СХЕМА К ТЕМЕ

$$P \neq Q,\ P, Q \in \alpha \Rightarrow PQ \subset \alpha$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

В кубе ABCDA1B1C1D1 точки A,B,C лежат в основании. Поэтому плоскость ABC — плоскость всего основания ABCD. Диагональ AC тоже лежит в ней: обе её конечные точки принадлежат основанию.

Самостоятельная работа

1.1 Сколько вершин, рёбер и граней у куба?

1.2 В кубе ABCDA1B1C1D1 назови линию пересечения плоскостей ABC и ABB1.

1.3 Точки A и B принадлежат плоскости α. M лежит на прямой AB. Докажи M∈α.

1.4 Можно ли однозначно задать плоскость тремя точками, лежащими на одной прямой?

02

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Куб и прямоугольный параллелепипед

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники, три ребра при одной вершине попарно перпендикулярны. Сначала применяют Пифагора в грани, затем в прямоугольном треугольнике с пространственной диагональю. У куба все рёбра равны. Диагональ грани соединяет противоположные вершины одной грани, пространственная диагональ — вершины, не принадлежащие одной грани.

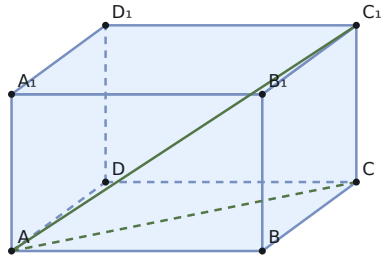

СХЕМА К ТЕМЕ

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Рёбра параллелепипеда 3,4,12. Диагональ основания $\sqrt{(3^2+4^2)}=5$. Пространственная диагональ $\sqrt{(5^2+12^2)}=13$. Два прямоугольных треугольника заменяют один сложный пространственный рисунок.

Самостоятельная работа

2.1 Ребро куба 5. Найди диагональ грани.

2.2 Рёбра прямоугольного параллелепипеда 2,3,6. Найди пространственную диагональ.

2.3 Диагональ куба 12. Найди его ребро.

2.4 Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 6 и 8, пространственная диагональ 26. Найди третье ребро.

03

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Прямые: параллельные, пересекающиеся, скрещивающиеся

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Две прямые в пространстве могут пересекаться, быть параллельными или скрещивающимися. Параллельные прямые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Скрещивающиеся не лежат ни в одной общей плоскости. Недостаточно заметить, что прямые «не встретились на рисунке». Признак скрещивания: одна прямая лежит в плоскости, другая пересекает её в точке, не принадлежащей первой прямой.

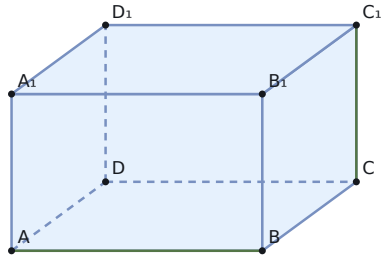

СХЕМА К ТЕМЕ

$$AB \parallel CD, \quad AB \perp BB_1$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

В кубе AB и CC1 скрещиваются: AB лежит в основании, а CC1 пересекает основание в C, причём C не лежит на AB. AB и CD, напротив, параллельны: это противоположные стороны квадрата.

Самостоятельная работа

3.1 В кубе ABCDA1B1C1D1 определи взаимное расположение AB и CD.

3.2 В том же кубе определи взаимное расположение AB и BB1.

3.3 Докажи, что AB и CC1 в кубе скрещиваются.

3.4 В кубе сравни прямые AC и A1C1, а также AC и BD.

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

04 Параллельность прямой и плоскости

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Прямая параллельна плоскости, если не имеет с ней общих точек. Признак: если прямая не лежит в плоскости и параллельна некоторой прямой этой плоскости, то она параллельна плоскости. Условие «не лежит» обязательно. Для доказательства обычно находят среднюю линию треугольника или соответствующее ребро параллельной грани.

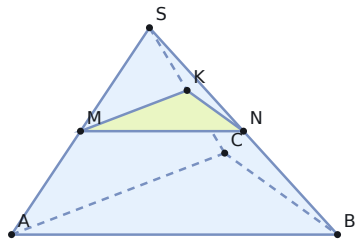

СХЕМА К ТЕМЕ

$$a \parallel b,\ b \subset \alpha,\ a \not\subset \alpha \Rightarrow a \parallel \alpha$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

В пирамиде SABC точки M,N — середины SA,SB. В треугольнике SAB отрезок MN — средняя линия, значит MN∥AB. Прямая AB лежит в основании ABC, а MN не лежит в нём. Следовательно MN∥(ABC).

Самостоятельная работа

4.1 В кубе докажи A1B1∥(ABC).

4.2 В пирамиде SABC точки M,N — середины SA,SC. Докажи MN∥(ABC).

4.3 В предыдущей задаче AC=18. Найди MN.

4.4 Прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α. Обязательно ли a∥α?

05

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Параллельные плоскости и параллельные сечения

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Две различные плоскости параллельны, если не пересекаются. Признак: две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой. Если параллельные плоскости пересечены третьей, линии пересечения параллельны. В призме сечения, параллельные основаниям и пересекающие все боковые рёбра, равны основаниям. В пирамиде они подобны основанию.

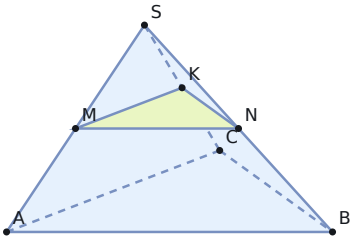

СХЕМА К ТЕМЕ

$$\alpha \parallel \beta,\ a = \alpha \cap \gamma,\ b = \beta \cap \gamma \ \Rightarrow\ a \parallel b$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

В тетраэдре SABC середины M,N,K рёбер SA,SB,SC образуют треугольник. MN∥AB, MK∥AC. Поэтому (MNK)∥(ABC). Коэффициент подобия треугольников MNK и ABC равен $\frac{1}{2}$, отношение площадей $\frac{1}{4}$.

Самостоятельная работа

5.1 В прямоугольном параллелепипеде назови плоскость, параллельную ABC.

5.2 Сечение прямой призмы параллельно основанию. Площадь основания 24. Найди площадь сечения.

5.3 Плоскость проходит через середины всех боковых рёбер пирамиды и параллельна основанию площади 80. Найди площадь сечения.

5.4 В тетраэдре SABC M,N,K — середины SA,SB,SC. Докажи параллельность (MNK) и (ABC).

06

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Перпендикулярность прямой и плоскости

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Прямая перпендикулярна плоскости, если её направление перпендикулярно всем прямым этой плоскости. Для доказательства достаточно двух пересекающихся прямых плоскости. Удобно брать их через точку пересечения прямой с плоскостью. Один прямой угол недостаточен. В прямой призме боковые рёбра перпендикулярны основанию; у правильной пирамиды высота проходит через центр основания.

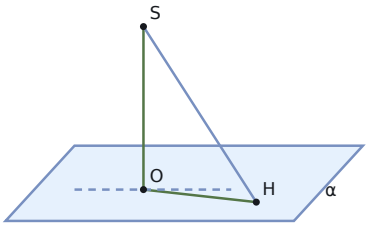

СХЕМА К ТЕМЕ

$$b, c \subset \alpha,\ b \cap c = O,\ a \perp b, c \ \Rightarrow\ a \perp \alpha$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

В кубе AA1⊥AB и AA1⊥AD: это стороны квадратных граней. Прямые AB и AD пересекаются и лежат в основании. Следовательно AA1⊥(ABCD), а значит AA1 перпендикулярна любой прямой основания, проходящей через A.

Самостоятельная работа

6.1 Докажи, что боковое ребро AA1 прямоугольного параллелепипеда перпендикулярно основанию.

6.2 SO⊥α, прямая OM лежит в α. Чему равен угол SOM?

6.3 В правильной четырёхугольной пирамиде SO — высота, O — центр основания. Докажи SO⊥AC.

6.4 Из AB⊥BC следует ли AB⊥(BCD)? Объясни.

07

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Проекция, наклонная и три перпендикуляра

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Пусть из точки S вне плоскости опущен перпендикуляр SO, а A лежит в плоскости. SA — наклонная, OA — её ортогональная проекция. Треугольник SOA прямоугольный. Теорема о трёх перпендикулярах: прямая плоскости, проходящая через A и перпендикулярная OA, перпендикулярна SA. Верно и обратное при ненулевой проекции. Именно так в пространстве обосновывают многие прямые углы.

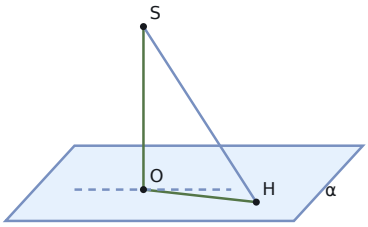

СХЕМА К ТЕМЕ

$$SA^2 = SO^2 + OA^2$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

SO=12, OA=5. Тогда SA=13. Если прямая b проходит через A в основании и b⊥OA, то по теореме о трёх перпендикулярах b⊥SA. Недостаточно просто увидеть прямой угол на перспективном рисунке.

Самостоятельная работа

7.1 SO⊥α, SO=8, OA=6, A∈α. Найди SA.

7.2 Длина наклонной SA=17, расстояние S до плоскости SO=15. Найди OA.

7.3 SO⊥α, A∈α. Прямая b проходит через A в α и перпендикулярна OA. Докажи b⊥SA.

7.4 Две наклонные SA,SB проведены к одной плоскости. SO=6, OA=8, OB=3. Какая наклонная длиннее и каковы их длины?

08

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Призма и её объём

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Призма имеет два равных параллельных основания, её боковые грани — параллелограммы. У прямой призмы боковое ребро совпадает с высотой; у наклонной это не так. Высота — перпендикулярное расстояние между плоскостями оснований. Объём любой призмы равен площади основания, умноженной на высоту. При фиксированной высоте отношение объёмов равно отношению площадей оснований.

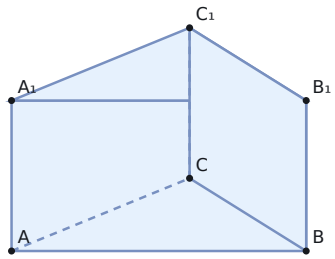

СХЕМА К ТЕМЕ

$$V = S_{\text{осн}} h$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Прямая треугольная призма имеет в основании прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8; боковое ребро 5. Площадь основания $6 \cdot \frac{8}{2} = 24$, высота 5. Объём $V = 24 \cdot 5 = 120$.

Самостоятельная работа

8.1 Площадь основания призмы 18, высота 7. Найди объём.

8.2 Объём призмы 84, площадь основания 12. Найди высоту.

8.3 Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 5,5,6, высота призмы 10. Найди объём.

8.4 Через среднюю линию треугольного основания призмы проведена плоскость, параллельная боковым рёбрам. Она отсекла меньшую треугольную призму. Объём исходной 200. Найди объём отсечённой.

09

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Поверхность призмы и параллелепипеда

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Для прямой призмы боковая поверхность равна периметру основания, умноженному на высоту: каждая боковая грань — прямоугольник. Полная поверхность включает два основания. Для наклонной призмы формула P основания·боковое ребро в общем случае неверна. У прямоугольного параллелепипеда три пары равных граней. Измеряй площадь в квадратных единицах, объём — в кубических.

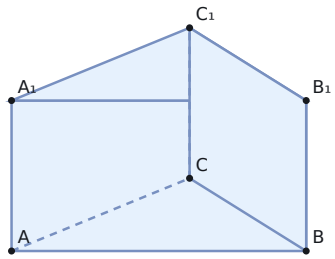

СХЕМА К ТЕМЕ

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + Ph$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Прямая призма: основание — прямоугольный треугольник 3,4,5, высота 6. Периметр 12, S бок=72. Площадь основания 6, поэтому S полн=72+12=84.

Самостоятельная работа

9.1 Ребро куба 4. Найди полную площадь поверхности.

9.2 Рёбра прямоугольного параллелепипеда 2,3,5. Найди полную поверхность.

9.3 Основание прямой призмы — равносторонний треугольник со стороной 6, высота призмы 4. Найди боковую и полную поверхности.

9.4 Через среднюю линию треугольного основания прямой призмы проведено параллельное боковым рёбрам сечение. Боковая поверхность отсечённой меньшей призмы 18. Найди боковую поверхность исходной.

10

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Правильная пирамида: высота, ребро, апофема

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Правильная пирамида имеет правильный многоугольник в основании; основание её высоты — центр этого многоугольника. Боковые рёбра равны, боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Апофема — высота боковой грани, проведённая из вершины пирамиды к стороне основания. Боковое ребро и апофема — разные отрезки. В правильной четырёхугольной пирамиде расстояние центра до вершины а $\frac{\sqrt{2}}{2}$, до стороны $\frac{a}{2}$.

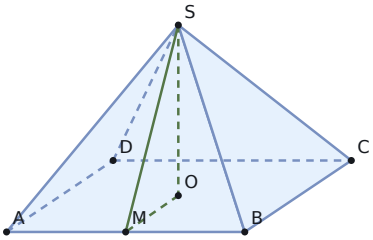

СХЕМА К ТЕМЕ

$$l^2 = h^2 + r^2$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Сторона квадратного основания 6, высота 4. Апофема l=√(4²+3²)=5. Боковое ребро e=√(4²+(3√2)²)=√34. Апофема короче бокового ребра.

Самостоятельная работа

10.1 Правильная четырёхугольная пирамида имеет сторону основания 8 и высоту 3. Найди апофему.

10.2 Сторона квадратного основания 6, высота пирамиды 6. Найди боковое ребро.

10.3 Правильная четырёхугольная пирамида: сторона основания 10, апофема 13. Найди высоту.

10.4 В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD точка O — центр основания, M — середина AB. Докажи SM⊥AB.

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

11 Объём, поверхность и подобные пирамиды

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту. Для правильной пирамиды боковая поверхность равна половине произведения периметра основания на апофему. При сечении, параллельном основанию, верхняя маленькая пирамида подобна исходной. Если отношение высот от вершины равно k, площади относятся как k^2, объёмы — как k^3. Для усечённой пирамиды можно вычесть объём верхней части.

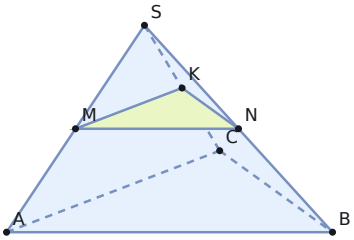

СХЕМА К ТЕМЕ

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h, \quad \frac{V_1}{V_2} = k^3$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Высота пирамиды 12, объём 216. Сечение на расстоянии 4 от вершины параллельно основанию. Маленькая пирамида имеет $k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, её объём $\frac{216}{27} = 8$. Объём оставшейся усечённой части 208.

Самостоятельная работа

11.1 Площадь основания пирамиды 45, высота 8. Найди объём.

11.2 Правильная четырёхугольная пирамида: сторона основания 6, апофема 5. Найди боковую и полную поверхности.

11.3 Пирамида объёма 320 рассечена плоскостью через середины боковых рёбер. Найди объём верхней пирамиды и оставшейся части.

11.4 Площадь параллельного основанию сечения составляет $\frac{9}{25}$ площади основания. Объём исходной пирамиды 500. Найди объём верхней пирамиды.

12

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Правильный тетраэдр

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Тетраэдр — пирамида с треугольным основанием. У правильного тетраэдра все шесть рёбер равны и все грани равносторонние. Высота опускается в центр основания. Центр равностороннего треугольника делит медиану в отношении 2:1 от вершины. Полезно сначала вывести высоту по Пифагору, а не запоминать формулу объёма. Произвольный тетраэдр не обязательно правильный.

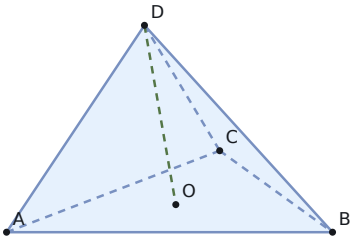

СХЕМА К ТЕМЕ

$$h = a\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

При ребре 6 радиус описанной около основания окружности равен $\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$. Высота тетраэдра $\sqrt{(36-12)}=2\sqrt{6}$. Площадь основания $9\sqrt{3}$, объём $\frac{(9\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6})}{3}=18\sqrt{2}$.

Самостоятельная работа

12.1 Ребро правильного тетраэдра 4. Найди площадь одной грани.

12.2 Ребро правильного тетраэдра 3. Найди полную поверхность.

12.3 Ребро правильного тетраэдра 6. Найди высоту и объём.

12.4 M,N — середины AB и AC правильного тетраэдра ABCD, ребро 10. Докажи MN∥(BCD) и найди MN.

13

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Цилиндр

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Здесь рассматривается прямой круговой цилиндр. Его основания — равные круги, высота перпендикулярна основаниям. Осевое сечение — прямоугольник со сторонами 2R и h. Развёртка боковой поверхности — прямоугольник ширины 2πR и высоты h. Плоскость, параллельная оси, даёт прямоугольное сечение; его ширина равна хорде основания.

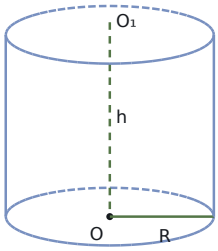

СХЕМА К ТЕМЕ

$$V = \pi R^2 h, \quad S_{\text{бок}} = 2\pi R h$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

R=3, h=4. Объём 36π; боковая поверхность 24π; полная 42π. Диагональ осевого сечения √(6²+4²)=2√13. Ширина осевого сечения — диаметр, а не радиус.

Самостоятельная работа

13.1 Радиус цилиндра 2, высота 5. Найди объём.

13.2 R=4, h=7. Найди боковую поверхность.

13.3 Осевое сечение цилиндра — квадрат со стороной 10. Найди радиус и объём.

13.4 Цилиндр имеет R=5, h=8. Плоскость параллельна оси и находится на расстоянии 3 от неё. Найди площадь сечения.

14

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Конус и усечённый конус

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

У прямого кругового конуса вершина находится над центром основания. Высота h, радиус R и образующая l образуют прямоугольный треугольник. Осевое сечение — равнобедренный треугольник с основанием 2R и боковыми сторонами l. Боковая поверхность πRl. Параллельный основанию разрез даёт подобные конусы. У усечённого конуса h — расстояние между основаниями, l — образующая боковой поверхности. Для усечённого конуса V=πh(R²+Rr+r²)/3, S бок=π(R+r)l; к полной поверхности добавляют оба основания.

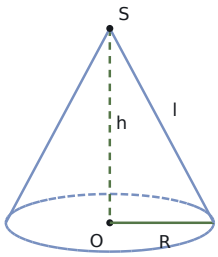

СХЕМА К ТЕМЕ

$$V=\frac{\pi R^2 h}{3},\quad l^2=R^2+h^2$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Конус: R=5, h=12. Образующая l=13; объём 100π; боковая поверхность 65π. Полная поверхность включает круг основания: 65π+25π=90π.

Самостоятельная работа

14.1 Радиус конуса 3, высота 4. Найди образующую.

14.2 R=6, h=10. Найди объём конуса.

14.3 Радиус конуса 5, образующая 13. Найди полную поверхность.

14.4 Радиусы оснований прямого усечённого конуса 5 и 2, высота 4. Найди образующую и объём.

15

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Сфера, шар и сечения

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Сфера — поверхность точек на расстоянии R от центра, шар включает и внутренние точки. Сечение шара плоскостью — круг. Если расстояние от центра шара до плоскости d, радиус сечения ρ удовлетворяет $\rho^2+d^2=R^2$. Большой круг получается при d=0. Касательная плоскость перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

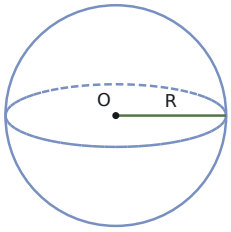

СХЕМА К ТЕМЕ

$$S = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Радиус шара 13, расстояние центра до секущей плоскости 5. Радиус сечения $\sqrt{(169-25)}=12$; площадь сечения 144π. Площадь круга сечения не равна площади поверхности шара.

Самостоятельная работа

15.1 Радиус шара 3. Найди объём.

15.2 Радиус сферы 5. Найди её площадь.

15.3 Радиус шара 10, расстояние от центра до плоскости сечения 6. Найди площадь сечения.

15.4 Около куба с ребром 4 описана сфера. Найди её радиус и объём шара.

16

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Угол между прямыми

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Угол между пересекающимися прямыми — меньший из образованных углов, от 0° до 90°. Для скрещивающихся прямых проводят через одну точку параллельные им прямые и находят угол между полученными направлениями. Удобно переносить ребро в грань, где уже лежит вторая прямая. Нельзя измерять угол между изображениями на перспективном рисунке.

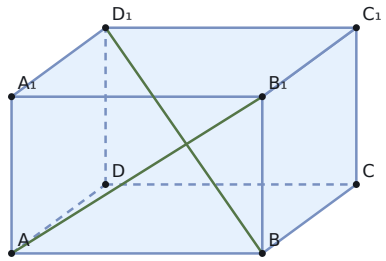

СХЕМА К ТЕМЕ

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

В кубе угол между AB и B1C1 равен углу между AB и BC, потому что B1C1∥BC. Он равен 90°. Хотя исходные прямые не пересекаются, угол между ними определён через параллельный перенос.

Самостоятельная работа

16.1 Найди угол между AB и A1B1 в кубе.

16.2 Найди угол между AB и B1C1 в кубе.

16.3 Найди угол между AC и B1C1 в кубе.

16.4 В кубе найди угол между AB1 и BC1.

17

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Угол между прямой и плоскостью

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Угол между наклонной и плоскостью — угол между этой наклонной и её ортогональной проекцией. Он лежит от 0° до 90°. Если SA — наклонная, SO — перпендикуляр, OA — проекция, искомый угол находится при A в прямоугольном SOA. Наклонная, лежащая в плоскости или параллельная ей, даёт угол 0°, перпендикулярная прямая — 90°.

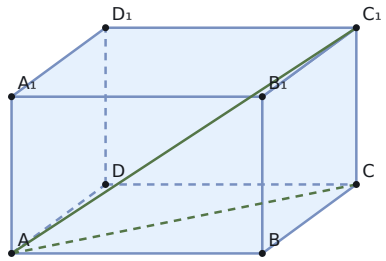

СХЕМА К ТЕМЕ

$$\sin\varphi = \frac{h}{l}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

В прямоугольном параллелепипеде AB=3, AD=4, AA1=5. Проекция диагонали AC1 на основание — AC=5. Поэтому tgφ=CC1/AC= $\frac{5}{5}$=1, и угол равен 45°.

Самостоятельная работа

17.1 Наклонная SA=10, SO⊥α, SO=5, A∈α. Найди угол SA с α.

17.2 SO=6, OA=6, SO⊥α, A∈α. Найди угол наклонной SA с α.

17.3 В кубе найди синус угла диагонали AC1 с основанием ABCD.

17.4 Правильная четырёхугольная пирамида имеет сторону основания 6 и высоту 3√2. Найди угол бокового ребра с основанием.

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

18 Двугранный угол и угол между плоскостями

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Чтобы измерить двугранный угол, выбирают точку на его ребре и в каждой грани проводят перпендикуляр к ребру. Угол между этими лучами — линейный угол двугранного угла. Угол между плоскостями выбирают меньшим, от 0° до 90°. У правильной пирамиды угол боковой грани с основанием удобно искать через апофему SM и перпендикуляр OM к стороне основания.

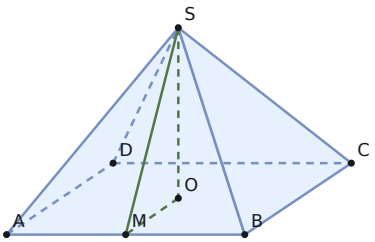

СХЕМА К ТЕМЕ

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Правильная четырёхугольная пирамида: сторона основания 8, высота 4. M — середина стороны, O — центр. OM=4, SO=4. В треугольнике SOM угол при M равен 45°; это линейный угол между боковой гранью и основанием.

Самостоятельная работа

18.1 Найди угол между плоскостями основания и боковой грани куба.

18.2 Правильная четырёхугольная пирамида: сторона основания 10, высота 5. Найди угол боковой грани с основанием.

18.3 Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды 6, апофема 6. Найди угол боковой грани с основанием.

18.4 У правильного тетраэдра найди косинус угла между двумя гранями.

19

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Расстояние от точки до плоскости

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Расстояние от точки до плоскости — длина перпендикуляра. Можно построить этот перпендикуляр, либо использовать объём: один и тот же тетраэдр имеет $V=S_1h_1/3=S_2h_2/3$. В методе объёмов обязательно убедись, что обе пары «основание — высота» относятся к одному телу. Расстояние между параллельными плоскостями равно расстоянию от любой точки одной до другой.

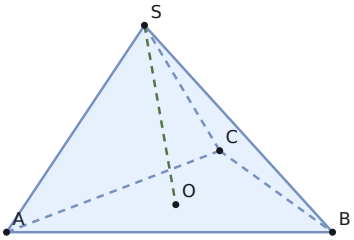

СХЕМА К ТЕМЕ

$$d = \frac{3V}{S}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Тетраэдр имеет три попарно перпендикулярных ребра OA=3, OB=4, OC=12. Объём равен $3\cdot4\cdot\frac{12}{6}=24$. Если площадь ABC равна $6\sqrt{26}$, то расстояние O до (ABC) равно $3\cdot\frac{24}{(6\sqrt{26})}=12/\sqrt{26}$.

Самостоятельная работа

19.1 Точка S находится над плоскостью α: SO⊥α, SO=7, A∈α, SA=25. Найди расстояние S до α.

19.2 Объём тетраэдра 20, площадь выбранной грани 12. Найди расстояние противоположной вершины до её плоскости.

19.3 В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания 6, высота 4. Найди расстояние центра основания O до плоскости боковой грани SAB.

19.4 В кубе ребра a найди расстояние A до плоскости A1BD.

20

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Расстояние между прямыми

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Для скрещивающихся прямых расстояние равно длине общего перпендикуляра: его концы лежат на прямых, а сам он перпендикулярен обеим. Иногда проще найти плоскость, содержащую одну прямую и параллельную другой, затем вычислить расстояние от точки второй прямой до этой плоскости. Это даёт расстояние прямых, но выбранную параллельность надо обосновать. Для пересекающихся прямых расстояние 0.

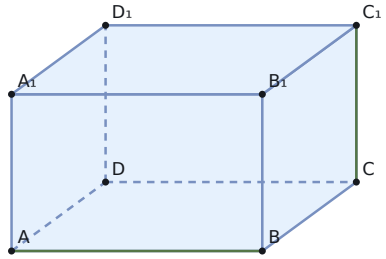

СХЕМА К ТЕМЕ

$$PQ \perp a,\ PQ \perp b \ \Rightarrow\ d(a,b) = PQ$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

В кубе ребра a прямые AB и CC1 скрещиваются. Отрезок BC соединяет точку B первой с точкой C второй и перпендикулярен обеим. Поэтому расстояние равно BC=a.

Самостоятельная работа

20.1 В кубе ребра 5 найди расстояние между AB и CC1.

20.2 Найди расстояние между прямыми AC и BD в кубе.

20.3 В кубе ребра 6 найди расстояние между AB и C1D1.

20.4 В кубе ребра a найди расстояние между AA1 и BC1.

21

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Построение и площадь сечений

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Сечение многогранника плоскостью — многоугольник, стороны которого лежат в гранях. Сначала соединяют заданные точки одной грани. Затем используют общие рёбра соседних граней и параллельность следов на параллельных гранях. Не соединяй точки разных граней как готовую сторону сечения без доказательства. После построения определи вид многоугольника и вычисли его стороны в соответствующих гранях.

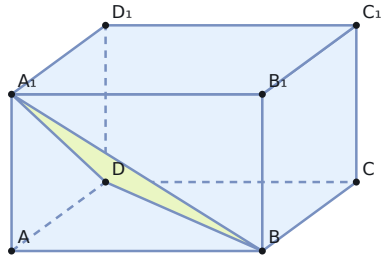

СХЕМА К ТЕМЕ

$$S_{ACC_1A_1} = a^2\sqrt{2} \quad \text{(куб)}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

В кубе плоскость через A,C,C1 содержит также A1: AA1∥CC1 и лежит в этой плоскости. Сечение — прямоугольник ACC1A1, его стороны a√2 и a. Площадь a²√2.

Самостоятельная работа

21.1 Найди площадь диагонального сечения ACC1A1 куба ребра 3.

21.2 В кубе ребра 4 плоскость проходит через B,D,A1. Определи сечение и его площадь.

21.3 В правильном тетраэдре ребра 8 плоскость проходит через середины трёх рёбер, выходящих из одной вершины. Найди площадь сечения.

21.4 Докажи, что диагональное сечение ACC1A1 прямой призмы с квадратным основанием — прямоугольник.

22

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Координаты, уравнение плоскости и оформление

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Координаты особенно удобны для прямоугольного параллелепипеда: оси направляют вдоль трёх рёбер. Направляющий вектор AB — разность координат B и A. Скалярное произведение u·v=uₓvₓ+uᵧvᵧ+u_zv_z. Плоскость Ax+By+Cz+D=0 имеет нормаль n=(A,B,C). Угол плоскостей находят по их нормалям; для угла прямой с плоскостью используют синус. Всегда объясняй выбор координат, составление уравнения и геометрический смысл результата. Для прямой направления u и плоскости нормали n: sinφ=|u·n|/(|u|·|n|).

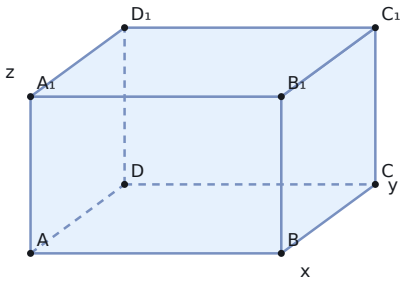

СХЕМА К ТЕМЕ

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Для куба ребра a возьмём A=(0,0,0), B=(a,0,0), D=(0,a,0), A1=(0,0,a). Плоскость A1BD: x+y+z=a, поскольку каждая из трёх точек удовлетворяет этому уравнению и точки неколлинеарны. Расстояние от A до неё равно a/√3.

Самостоятельная работа

22.1 A=(1,2,3), B=(4,6,15). Найди AB.

22.2 Докажи перпендикулярность векторов u=(1,2,−1), v=(2,0,2).

22.3 Найди расстояние от O=(0,0,0) до плоскости 2x+y+2z−9=0.

22.4 В кубе ребра 6 найди угол между плоскостями основания z=0 и сечения x+y+z=6. Ответ дай через косинус.

1

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

Параллельность и расстояние в кубе

УСЛОВИЕ

Дан куб ABCDA1B1C1D1 с ребром 6. M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

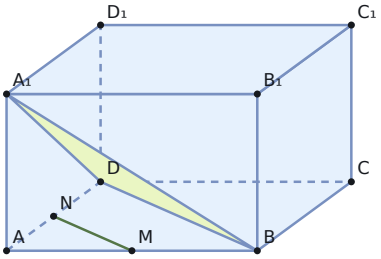

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи MN∥(A1BD).

б) Найди расстояние от M до плоскости A1BD.

2

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

Расстояние до боковой грани пирамиды

УСЛОВИЕ

В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 6, высота SO равна 4. O — центр основания, M — середина AB.

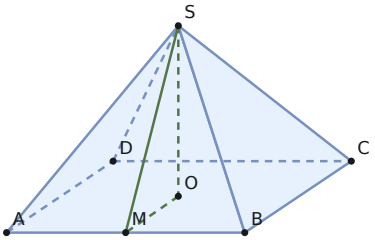

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи AB⊥(SOM).

б) Найди расстояние от O до плоскости SAB.

3

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

Общий перпендикуляр в тетраэдре

УСЛОВИЕ

В правильном тетраэдре ABCD все рёбра равны 6. M — середина AB, N — середина CD.

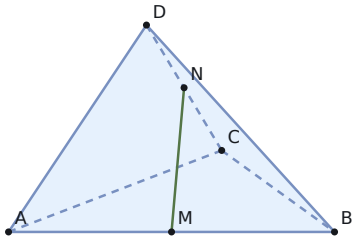

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что MN перпендикулярен AB и CD.

б) Найди расстояние между прямыми AB и CD.

4

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

Угол секущей плоскости с основанием

УСЛОВИЕ

Дана правильная треугольная призма ABCA1B1C1. Стороны основания и боковые рёбра равны 6. M — середина AB.

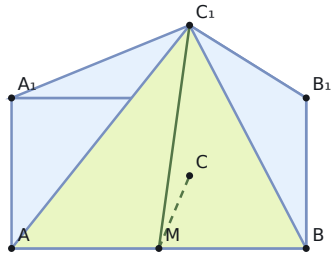

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что AB перпендикулярна плоскости MCC1.

б) Найди синус угла между плоскостями ABC1 и ABC.

5

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

Сечение параллелепипеда и расстояние

УСЛОВИЕ

В прямоугольном параллелепипеде ABCDA1B1C1D1: AB=3, AD=4, AA1=12. Проведена плоскость через B, D и A1.

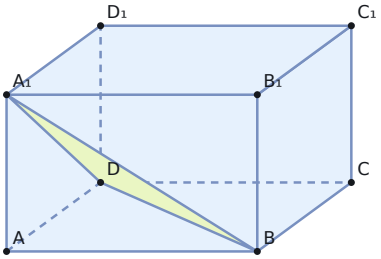

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что сечение является треугольником BDA1.

б) Найди расстояние от C1 до плоскости сечения.

6

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

Расстояние между диагоналями куба

УСЛОВИЕ

В кубе ABCDA1B1C1D1 ребро равно 6. P — середина AB1. Точка Q лежит на BD1, причём BQ:QD1=1:2.

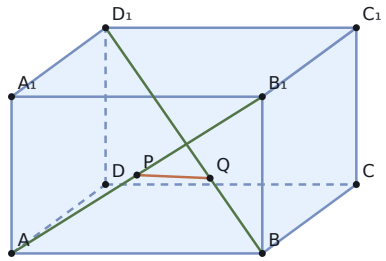

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что PQ — общий перпендикуляр прямых AB1 и BD1.

б) Найди расстояние между прямыми AB1 и BD1.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 01

Как читать пространственный чертёж

1.1. Ответ: 8 вершин, 12 рёбер, 6 граней.

В каждом основании по 4 вершины, всего 8. По 4 ребра в двух основаниях и 4 боковых: 12. Два основания и четыре боковые грани дают 6 граней.

1.2. Ответ: Прямая AB.

Точки A и B общие, значит прямая AB лежит в обеих плоскостях. Плоскости различны, поэтому их пересечение — именно AB.

1.3. Ответ: M принадлежит α.

Прямая AB проходит через две точки плоскости α, поэтому вся прямая AB лежит в α. Так как $M \in AB$, имеем $M \in \alpha$.

1.4. Ответ: Нет.

Через прямую, содержащую три данные точки, проходит бесконечно много плоскостей. Условие «не лежат на одной прямой» необходимо.

ТЕМА 02

Куб и прямоугольный параллелепипед

2.1. Ответ: $5\sqrt{2}$.

Диагональ грани равна $\sqrt{(5^2+5^2)}=5\sqrt{2}$.

2.2. Ответ: 7.

$d=\sqrt{(2^2+3^2+6^2)}=\sqrt{49}=7$.

2.3. Ответ: $4\sqrt{3}$.

$a=12/\sqrt{3}=4\sqrt{3}$. Проверка: $4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=12$.

2.4. Ответ: 24.

$c^2=26^2-6^2-8^2=676-36-64=576$. Длина положительна, поэтому $c=24$.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 03

Прямые: параллельные, пересекающиеся, скрещивающиеся

3.1. Ответ: Параллельны.

AB и CD — противоположные стороны квадрата ABCD, значит AB∥CD.

3.2. Ответ: Пересекаются под прямым углом.

Они имеют общую точку B и являются соседними сторонами квадратной грани ABB1A1, поэтому перпендикулярны.

3.3. Ответ: Скрещиваются.

AB⊂(ABC), CC1 пересекает (ABC) в C∉AB. По признаку скрещивающихся прямых AB и CC1 скрещиваются.

3.4. Ответ: AC∥A1C1; AC и BD пересекаются.

Верхняя грань получена из нижней параллельным переносом, поэтому соответствующие диагонали AC и A1C1 параллельны. Диагонали AC и BD одного квадрата пересекаются в его центре.

ТЕМА 04

Параллельность прямой и плоскости

4.1. Ответ: A1B1∥(ABC).

A1B1∥AB, AB⊂(ABC), причём A1B1 не лежит в основании. По признаку параллельности прямой и плоскости утверждение верно.

4.2. Ответ: MN∥(ABC).

MN — средняя линия SAC, значит MN∥AC. AC лежит в (ABC), а MN в этой плоскости не лежит. Следовательно MN∥(ABC).

4.3. Ответ: 9.

В треугольнике SAC средняя линия $MN=\frac{AC}{2}=9$.

4.4. Ответ: Нет, без дополнительного условия.

Например, две параллельные стороны квадрата лежат в одной плоскости. Тогда a⊂α, а не a∥α. Нужно дополнительно установить a⊄α.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 05

Параллельные плоскости и параллельные сечения

5.1. Ответ: Плоскость A1B1C1.

AB∥A1B1 и AC∥A1C1; каждая пара прямых в своём основании пересекается. По признаку плоскости оснований параллельны.

5.2. Ответ: 24.

Параллельное основанию сечение призмы, пересекающее все боковые рёбра, равно основанию, поэтому его площадь 24.

5.3. Ответ: 20.

Отношение расстояний от вершины и соответствующих длин равно $\frac{1}{2}$. Площади относятся как $(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$, поэтому $S=\frac{80}{4}=20$.

5.4. Ответ: Плоскости параллельны.

В SAB имеем MN∥AB; в SAC имеем MK∥AC. MN и MK пересекаются в M, AB и AC пересекаются в A. По признаку параллельности плоскостей (MNK)∥(ABC).

ТЕМА 06

Перпендикулярность прямой и плоскости

6.1. Ответ: AA1⊥(ABC).

AA1⊥AB и AA1⊥AD как соседние стороны прямоугольных граней. AB и AD пересекаются и определяют основание. Применяем признак перпендикулярности прямой и плоскости.

6.2. Ответ: 90°.

SO перпендикулярна плоскости α, поэтому перпендикулярна проходящей через O прямой OM.

6.3. Ответ: SO⊥AC.

SO⊥(ABCD) по определению высоты. AC лежит в основании и проходит через O, следовательно SO⊥AC.

6.4. Ответ: Нет.

Перпендикулярность к одной прямой недостаточна. Например, в квадрате ABCD стороны AB и BC перпендикулярны, но AB лежит в плоскости BCD и не перпендикулярна ей.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 07

Проекция, наклонная и три перпендикуляра

7.1. Ответ: 10.

SA=√(8²+6²)=10.

7.2. Ответ: 8.

OA²=SA²−SO²=289−225=64, OA=8.

7.3. Ответ: b⊥SA.

OA — проекция наклонной SA на α. Прямая b лежит в α, проходит через основание наклонной A и перпендикулярна проекции OA. По теореме о трёх перпендикулярах b⊥SA.

7.4. Ответ: SA=10, SB=3√5; SA длиннее.

SA=√(36+64)=10, SB=√(36+9)=3√5. Большей проекции соответствует большая наклонная; OA>OB, значит SA>SB.

ТЕМА 08

Призма и её объём

8.1. Ответ: 126.

V=18·7=126.

8.2. Ответ: 7.

h=$\frac{V}{S}=\frac{84}{12}=7$.

8.3. Ответ: 120.

В равнобедренном основании высота к стороне 6 равна √(25−9)=4. S основания=6·$\frac{4}{2}$=12, V=12·10=120.

8.4. Ответ: 50.

Меньший треугольник основания подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его площадь в 4 раза меньше. Высоты двух призм равны. Поэтому V малого=$\frac{200}{4}$=50.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 09

Поверхность призмы и параллелепипеда

9.1. Ответ: 96.

$S=6\cdot 4^2=96$.

9.2. Ответ: 62.

$S=2(2\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 5)=2(6+10+15)=62$.

9.3. Ответ: S бок=72; S полн=72+18√3.

Периметр основания 18, боковая поверхность $18\cdot 4=72$. S основания$=6^2\frac{\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$. Добавляем два основания: $72+18\sqrt{3}$.

9.4. Ответ: 36.

У меньшей призмы высота та же, а все стороны и периметр основания уменьшены в 2 раза. Поэтому её боковая поверхность составляет половину исходной: $S=2\cdot 18=36$.

ТЕМА 10

Правильная пирамида: высота, ребро, апофема

10.1. Ответ: 5.

В прямоугольном треугольнике высоты и апофемы $l^2=3^2+4^2=25$, $l=5$.

10.2. Ответ: 3√6.

$e^2=6^2+(3\sqrt{2})^2=36+18=54$, $e=3\sqrt{6}$.

10.3. Ответ: 12.

$h^2=13^2-5^2=169-25=144$, $h=12$.

10.4. Ответ: SM⊥AB.

В квадрате OM⊥AB. SO⊥(ABCD), поэтому OM — ортогональная проекция наклонной SM на основание. По теореме о трёх перпендикулярах SM⊥AB; SM является апофемой.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 11

Объём, поверхность и подобные пирамиды

11.1. Ответ: 120.

$V=45\cdot\frac{8}{3}=120$.

11.2. Ответ: 60 и 96.

$S_{бок}=24\cdot\frac{5}{2}=60$. Полная поверхность $60+36=96$.

11.3. Ответ: 40 и 280.

Верхняя пирамида подобна исходной с $k=\frac{1}{2}$, поэтому её объём $320\cdot(\frac{1}{2})^3=40$. Оставшаяся часть $320-40=280$.

11.4. Ответ: 108.

Из $k^2=\frac{9}{25}$ и $k>0$ получаем $k=\frac{3}{5}$. Отношение объёмов $k^3=\frac{27}{125}$. Объём верхней части $500\cdot\frac{27}{125}=108$.

ТЕМА 12

Правильный тетраэдр

12.1. Ответ: 4√3.

$S_{грани}=4^2\frac{\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$.

12.2. Ответ: 9√3.

Каждая грань имеет площадь $\frac{9\sqrt{3}}{4}$, всего 4 грани, поэтому $S=9\sqrt{3}$.

12.3. Ответ: h=2√6; V=18√2.

В основании равносторонний треугольник стороны 6; его описанный радиус $2\sqrt{3}$. Высота $h=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6}$. Основание имеет площадь $9\sqrt{3}$, $V=9\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=18\sqrt{2}$.

12.4. Ответ: MN∥(BCD); MN=5.

В треугольнике ABC отрезок MN — средняя линия: $MN\parallel BC$ и $MN=\frac{BC}{2}=5$. $BC\subset(BCD)$, MN не лежит в (BCD). По признаку параллельности прямой и плоскости $MN\parallel(BCD)$.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 13

Цилиндр

13.1. Ответ: 20π.

$V=\pi\cdot 2^2\cdot 5=20\pi$.

13.2. Ответ: 56π.

$S_{бок}=2\pi\cdot 4\cdot 7=56\pi$.

13.3. Ответ: R=5; V=250π.

$2R=10$ и $h=10$. Значит $R=5$, $V=\pi\cdot 25\cdot 10=250\pi$.

13.4. Ответ: 64.

Половина хорды $\sqrt{(5^2-3^2)}=4$, вся хорда 8. Сечение — прямоугольник со сторонами 8 и h=8, площадь 64.

ТЕМА 14

Конус и усечённый конус

14.1. Ответ: 5.

$l=\sqrt{(3^2+4^2)}=5$.

14.2. Ответ: 120π.

$V=\pi\cdot 6^2\cdot \frac{10}{3}=120\pi$.

14.3. Ответ: 90π.

$S_{бок}=\pi\cdot 5\cdot 13=65\pi$. $S_{основания}=25\pi$. Полная поверхность 90π.

14.4. Ответ: l=5; V=52π.

$l=\sqrt{((5-2)^2+4^2)}=5$. По формуле объёма усечённого конуса $V=\pi\cdot 4\cdot \frac{(25+10+4)}{3}=52\pi$. Формула получается вычитанием объёмов двух подобных полных конусов.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 15

Сфера, шар и сечения

15.1. Ответ: 36π.

$V=4\pi\cdot 3^3/3=36\pi$.

15.2. Ответ: 100π.

$S=4\pi\cdot 5^2=100\pi$.

15.3. Ответ: 64π.

$\rho^2=10^2-6^2=64$, $\rho=8$. Площадь круга сечения $\pi\rho^2=64\pi$.

15.4. Ответ: R=2√3; V=32π√3.

Диагональ куба $4\sqrt{3}$, значит $R=2\sqrt{3}$. $V=4\pi(2\sqrt{3})^3/3=4\pi\cdot\frac{24\sqrt{3}}{3}=32\pi\sqrt{3}$.

ТЕМА 16

Угол между прямыми

16.1. Ответ: 0°.

$AB\parallel A_1B_1$, поэтому угол между их направлениями равен 0°.

16.2. Ответ: 90°.

$B_1C_1\parallel BC$. Стороны AB и BC квадрата перпендикулярны, значит искомый угол 90°.

16.3. Ответ: 45°.

Угол между AC и B_1C_1 равен углу между AC и BC. Диагональ квадрата делит прямой угол пополам, получаем 45°.

16.4. Ответ: 60°.

В единичном масштабе направления $u=(1,0,1)$, $v=(0,1,1)$. $u\cdot v=1$, $|u|=|v|=\sqrt{2}$. $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, поэтому $\varphi=60°$. Модуль скалярного произведения обеспечивает выбор меньшего угла.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 17

Угол между прямой и плоскостью

17.1. Ответ: 30°.

$\sin\varphi = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Так как угол прямой с плоскостью лежит в [0°,90°], φ=30°.

17.2. Ответ: 45°.

Проекция SA — OA. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{SO}{OA} = \frac{6}{6} = 1$, значит φ=45°.

17.3. Ответ: 1/√3 = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

При ребре a диагональ AC1=a√3, высота CC1=a. Поэтому $\sin\varphi = CC1/AC1 = 1/\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

17.4. Ответ: 45°.

Пусть O — центр основания. AO — половина диагонали квадрата: 3√2. В прямоугольном SOA имеем SO=AO, поэтому ∠SAO=45°. Это и есть угол SA с основанием.

ТЕМА 18

Двугранный угол и угол между плоскостями

18.1. Ответ: 90°.

Стороны, проведённые в этих гранях перпендикулярно общему ребру, взаимно перпендикулярны. Угол между плоскостями равен 90°.

18.2. Ответ: 45°.

M — середина ребра основания, O — центр. SM и OM перпендикулярны ребру, поэтому искомый угол ∠SMO. $\operatorname{tg}\angle SMO = \frac{SO}{OM} = \frac{5}{5} = 1$, угол 45°.

18.3. Ответ: 60°.

OM=3, SM=6. $\cos\varphi = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, значит φ=60°. ∠SMO — линейный угол, поскольку обе его стороны перпендикулярны ребру основания.

18.4. Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пусть M — середина общего ребра AB, C и D — остальные вершины. В равносторонних гранях CM⊥AB и DM⊥AB, CM=DM=a$\frac{\sqrt{3}}{2}$, CD=a. В треугольнике CMD по косинусам $\cos\angle CMD = \frac{(3a^2/4 + 3a^2/4 - a^2)}{(2 \cdot 3a^2/4)} = \frac{1}{3}$. Угол острый, он и есть угол между плоскостями.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 19

Расстояние от точки до плоскости

19.1. Ответ: 7.

Расстояние до плоскости равно SO=7 независимо от длины наклонной SA.

19.2. Ответ: 5.

h=3V/S=$\frac{60}{12}$=5.

19.3. Ответ: $\frac{12}{5}$.

M — середина AB, OM=3, SO=4, SM=5. Плоскость SOM перпендикулярна AB, поэтому перпендикуляр из O к SM перпендикулярен всей плоскости SAB. Его длина — высота к гипотенузе в прямоугольном SOM: d=SO·$\frac{OM}{SM}=\frac{12}{5}$.

19.4. Ответ: a/√3 = a$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Объём тетраэдра AA1BD равен ($\frac{a^2}{2}$)·$\frac{a}{3}$=a³/6. Треугольник A1BD равносторонний со стороной a√2, его площадь a²$\frac{\sqrt{3}}{2}$. Искомая высота d=3V/S=$\frac{(a^3/2)}{(a^2\sqrt{3}/2)}$=a/√3.

ТЕМА 20

Расстояние между прямыми

20.1. Ответ: 5.

B∈AB, C∈CC1, BC⊥AB и BC⊥CC1 как рёбра прямоугольных граней. Значит расстояние равно BC=5.

20.2. Ответ: 0.

Прямые AC и BD имеют общую точку — центр квадрата. Поэтому их расстояние равно 0.

20.3. Ответ: 6√2.

AB∥C1D1. Отрезок AD1 соединяет точки этих прямых. AB перпендикулярна плоскости ADD1, поэтому AB⊥AD1; также AD1⊥C1D1. Длина AD1 — диагональ квадратной грани: 6√2.

20.4. Ответ: a.

A∈AA1, B∈BC1. AB⊥AA1. Кроме того, AB⊥BC и AB⊥BB1, значит AB⊥(BCC1), откуда AB⊥BC1. AB — общий перпендикуляр, длина a.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 21

Построение и площадь сечений

21.1. Ответ: 9√2.

AC=3√2, AA1=3. Они перпендикулярны, потому что AA1⊥основанию. Площадь прямоугольника 3·3√2=9√2.

21.2. Ответ: Равносторонний треугольник BDA1; площадь 8√3.

Сечение соединяет B,D,A1 и отсекает вершину A; других рёбер куба плоскость не пересекает. BD=BA1=DA1=4√2. Площадь равностороннего треугольника $(4\sqrt{2})^2\frac{\sqrt{3}}{4}=8\sqrt{3}$.

21.3. Ответ: 4√3.

В каждой из трёх граней отрезок между серединами рёбер — средняя линия длины 4. Значит сечение — равносторонний треугольник стороны 4, $S=4^2\frac{\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$.

21.4. Ответ: Сечение — прямоугольник.

AA1∥CC1 и AC∥A1C1, поэтому ACC1A1 — параллелограмм. Поскольку призма прямая, AA1⊥основанию, в частности AA1⊥AC. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

ТЕМА 22

Координаты, уравнение плоскости и оформление

22.1. Ответ: 13.

$AB=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2+(15-3)^2}=\sqrt{9+16+144}=13$.

22.2. Ответ: u⊥v.

$u\cdot v=1\cdot2+2\cdot0+(-1)\cdot2=0$. Оба вектора ненулевые, значит они перпендикулярны.

22.3. Ответ: 3.

$d=\frac{|-9|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3$.

22.4. Ответ: $\cos\varphi=1/\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Угол плоскостей равен меньшему углу между нормалями. Скалярное произведение равно 1, нормы равны 1 и √3, поэтому $\cos\varphi=1/\sqrt{3}$. Ребро куба на величину угла не влияет.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

1 Параллельность и расстояние в кубе

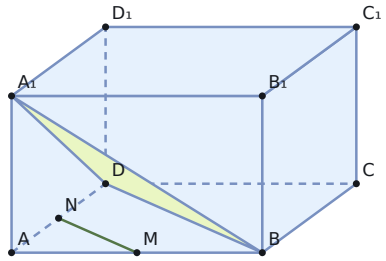

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи MN∥(A1BD).

MN∥(A1BD).

В треугольнике ABD точки M,N — середины сторон AB,AD. Поэтому MN∥BD. BD лежит в плоскости A1BD. Эта плоскость пересекает плоскость основания по BD, а MN — отличная от BD параллельная прямая основания. Значит MN не лежит в (A1BD). По признаку параллельности прямой и плоскости MN∥(A1BD).

б) Найди расстояние от M до плоскости A1BD.

√3.

Положим A=(0,0,0), B=(6,0,0), D=(0,6,0), A1=(0,0,6). Плоскость A1BD имеет уравнение x+y+z=6: все три неколлинеарные точки удовлетворяют ему. M=(3,0,0). Расстояние $d=|3-6|/\sqrt{(1^2+1^2+1^2)}=3/\sqrt{3}=\sqrt{3}$. В силу пункта а это также расстояние от любой точки прямой MN до плоскости.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Нужный угол или перпендикуляр построен и обоснован? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

2 Расстояние до боковой грани пирамиды

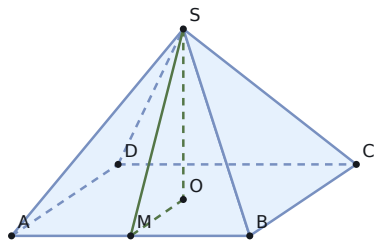

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи AB⊥(SOM).

AB⊥(SOM).

В квадрате OM⊥AB. Через M проведём прямую m∥SO. Так как SO⊥основанию, то m⊥основанию, в частности m⊥AB. Прямые OM и m пересекаются в M и лежат в (SOM): плоскость содержит SO и M, поэтому содержит и проходящую через M параллельную SO прямую. Следовательно AB перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости SOM, значит AB⊥(SOM).

б) Найди расстояние от O до плоскости SAB.

$\frac{12}{5}$.

OM=3, SO=4, поэтому SM=5. Пусть H — основание перпендикуляра из O к SM. Прямая OH лежит в (SOM), поэтому из пункта а её направление перпендикулярно AB. Через H в (SAB) проведём прямую h∥AB. Тогда OH⊥h и OH⊥SM; h и SM пересекаются в H. По признаку OH⊥(SAB). Искомое расстояние OH — высота к гипотенузе прямоугольного SOM: $OH=SO\cdot\frac{OM}{SM}=4\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Нужный угол или перпендикуляр построен и обоснован? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

3 Общий перпендикуляр в тетраэдре

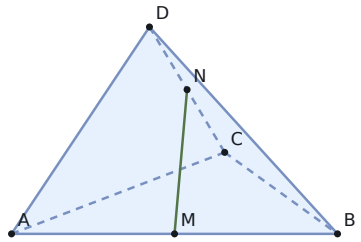

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что MN перпендикулярен AB и CD.

MN⊥AB и MN⊥CD.

В равносторонних треугольниках ABC и ABD медианы CM и DM являются высотами, поэтому AB⊥CM и AB⊥DM. Они пересекаются в M, значит AB⊥(CMD), откуда AB⊥MN. Аналогично в равносторонних ACD и BCD медианы AN и BN перпендикулярны CD, поэтому CD⊥(ABN), откуда CD⊥MN. Здесь MN лежит в обеих указанных плоскостях, поскольку M∈AB, N∈CD.

б) Найди расстояние между прямыми AB и CD.

$3\sqrt{2}$.

По пункту а MN — общий перпендикуляр AB и CD, поэтому его длина и есть расстояние. В равносторонней грани ABC высота $CM=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$; аналогично $DM=3\sqrt{3}$. В равнобедренном MCD медиана MN к CD является высотой, $CN=3$. По Пифагору $MN=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Нужный угол или перпендикуляр построен и обоснован? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

4 Угол секущей плоскости с основанием

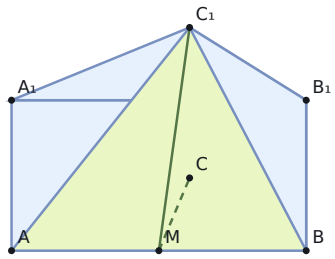

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что AB перпендикулярна плоскости MCC1.

AB⊥(MCC1).

В равностороннем основании CM⊥AB. Через M проведём m∥CC1; она лежит в плоскости MCC1 и перпендикулярна основанию, значит m⊥AB. Две прямые CM и m пересекаются в M. Следовательно по признаку перпендикулярности прямой и плоскости AB⊥(MCC1).

б) Найди синус угла между плоскостями ABC1 и ABC.

$2/\sqrt{7} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Плоскости ABC1 и ABC пересекаются по AB. Из пункта а AB⊥MC1 и AB⊥MC, поэтому ∠C1MC — линейный угол. В прямоугольном MCC1: $MC=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$, CC1=6, MC1=√(27+36)=3√7. Значит $\sin\angle C1MC=CC1/MC1=\frac{6}{(3\sqrt{7})}=2/\sqrt{7}$. Угол острый, поэтому это угол между плоскостями.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Нужный угол или перпендикуляр построен и обоснован? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

5 Сечение параллелепипеда и расстояние

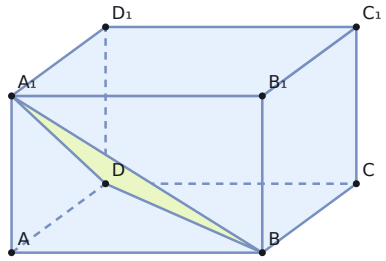

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что сечение является треугольником BDA1.

Сечение — треугольник BDA1.

Выберем A=(0,0,0), B=(3,0,0), D=(0,4,0), A1=(0,0,12). Плоскость имеет уравнение 4x+3y+z=12. Внутри параллелепипеда x,y,z≥0. Все точки этой плоскости с неотрицательными координатами автоматически удовлетворяют x≤3, y≤4, z≤12. Они образуют треугольник с пересечениями на осях B,D,A1: точка (x,y,z) представляется как $(\frac{x}{3})$B+$(\frac{y}{4})$D+$(\frac{z}{12})$A1, а коэффициенты неотрицательны и в сумме равны 1. Других точек сечения вне этого треугольника нет.

б) Найди расстояние от C1 до плоскости сечения.

24/√26 = $\frac{12\sqrt{26}}{13}$.

Из пункта а уравнение плоскости 4x+3y+z−12=0. Подставим C1=(3,4,12): значение левой части 12+12+12−12=24. Норма нормали √(4²+3²+1²)=√26. Поэтому расстояние d=24/√26= $\frac{12\sqrt{26}}{13}$. Формула даёт расстояние до всей плоскости; положение основания перпендикуляра внутри треугольника проверять не требуется.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Нужный угол или перпендикуляр построен и обоснован? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

6 Расстояние между диагоналями куба

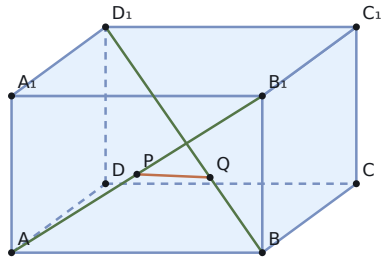

СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что PQ — общий перпендикуляр прямых AB1 и BD1.

PQ⊥AB1 и PQ⊥BD1.

Положим A=(0,0,0), B=(6,0,0), D=(0,6,0), A1=(0,0,6). Тогда B1=(6,0,6), D1=(0,6,6). P=(3,0,3). Поскольку BQ:QD1=1:2, точка $Q=B+\frac{(D1-B)}{3}=(4,2,2)$. Вектор PQ=(1,2,−1). Направления AB1 и BD1 можно взять как u=(1,0,1) и v=(−1,1,1). Скалярные произведения PQ·u=1−1=0 и PQ·v=−1+2−1=0. Поэтому PQ перпендикулярен обеим прямым; его концы по условию лежат на них.

б) Найди расстояние между прямыми AB1 и BD1.

√6.

Из пункта а общий перпендикуляр имеет вектор PQ=(1,2,−1). Его длина $\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$. Следовательно расстояние между скрещивающимися прямыми равно √6. Для куба ребра a тот же расчёт даёт a/√6.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Нужный угол или перпендикуляр построен и обоснован? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ПРАКТИКОЙ

Опорные формулы

01. Как читать пространственный чертёж

$$P \neq Q,\ P, Q \in \alpha \ \Rightarrow\ PQ \subset \alpha$$

02. Куб и прямоугольный параллелепипед

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

03. Прямые: параллельные, пересекающиеся, скрещивающиеся

$$AB \parallel CD, \quad AB \perp BB_1$$

04. Параллельность прямой и плоскости

$$a \parallel b,\ b \subset \alpha,\ a \not\subset \alpha \ \Rightarrow\ a \parallel \alpha$$

05. Параллельные плоскости и параллельные сечения

$$\alpha \parallel \beta,\ a = \alpha \cap \gamma,\ b = \beta \cap \gamma \ \Rightarrow\ a \parallel b$$

06. Перпендикулярность прямой и плоскости

$$b, c \subset \alpha,\ b \cap c = O,\ a \perp b, c \ \Rightarrow\ a \perp \alpha$$

07. Проекция, наклонная и три перпендикуляра

$$SA^2 = SO^2 + OA^2$$

08. Призма и её объём

$$V = S_{\text{осн}} h$$

09. Поверхность призмы и параллелепипеда

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + Ph$$

10. Правильная пирамида: высота, ребро, апофема

$$l^2 = h^2 + r^2$$

11. Объём, поверхность и подобные пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h, \quad \frac{V_1}{V_2} = k^3$$

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ПРАКТИКОЙ

Опорные формулы

12. Правильный тетраэдр

$$h = a\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

13. Цилиндр

$$V = \pi R^2 h, \quad S_{\text{бок}} = 2\pi R h$$

14. Конус и усечённый конус

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}, \quad l^2 = R^2 + h^2$$

15. Сфера, шар и сечения

$$S = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

16. Угол между прямыми

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

17. Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \frac{h}{l}$$

18. Двугранный угол и угол между плоскостями

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

19. Расстояние от точки до плоскости

$$d = \frac{3V}{S}$$

20. Расстояние между прямыми

$$PQ \perp a,\ PQ \perp b \ \Rightarrow\ d(a,b) = PQ$$

21. Построение и площадь сечений

$$S_{ACC_1A_1} = a^2\sqrt{2} \quad \text{(куб)}$$

22. Координаты, уравнение плоскости и оформление

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ДЛЯ БЫСТРОЙ ПРОВЕРКИ

Краткие ответы

01. Как читать пространственный чертёж

1) 8 вершин, 12 рёбер, 6 граней. | 2) Прямая AB. | 3) M принадлежит α. | 4) Нет.

02. Куб и прямоугольный параллелепипед

1) $5\sqrt{2}$. | 2) 7. | 3) $4\sqrt{3}$. | 4) 24.

03. Прямые: параллельные, пересекающиеся, скрещивающиеся

1) Параллельны. | 2) Пересекаются под прямым углом. | 3) Скрещиваются. | 4) AC∥A1C1; AC и BD пересекаются.

04. Параллельность прямой и плоскости

1) A1B1∥(ABC). | 2) MN∥(ABC). | 3) 9. | 4) Нет, без дополнительного условия.

05. Параллельные плоскости и параллельные сечения

1) Плоскость A1B1C1. | 2) 24. | 3) 20. | 4) Плоскости параллельны.

06. Перпендикулярность прямой и плоскости

1) AA1⊥(ABC). | 2) 90°. | 3) SO⊥AC. | 4) Нет.

07. Проекция, наклонная и три перпендикуляра

1) 10. | 2) 8. | 3) b⊥SA. | 4) SA=10, SB=$3\sqrt{5}$; SA длиннее.

08. Призма и её объём

1) 126. | 2) 7. | 3) 120. | 4) 50.

ДЛЯ БЫСТРОЙ ПРОВЕРКИ

Краткие ответы

09. Поверхность призмы и параллелепипеда

1) 96. | 2) 62. | 3) $S_{бок}=72$; $S_{полн}=72+18\sqrt{3}$. | 4) 36.

10. Правильная пирамида: высота, ребро, апофема

1) 5. | 2) $3\sqrt{6}$. | 3) 12. | 4) $SM\perp AB$.

11. Объём, поверхность и подобные пирамиды

1) 120. | 2) 60 и 96. | 3) 40 и 280. | 4) 108.

12. Правильный тетраэдр

1) $4\sqrt{3}$. | 2) $9\sqrt{3}$. | 3) $h=2\sqrt{6}$; $V=18\sqrt{2}$. | 4) $MN\parallel(BCD)$; $MN=5$.

13. Цилиндр

1) 20π. | 2) 56π. | 3) $R=5$; $V=250\pi$. | 4) 64.

14. Конус и усечённый конус

1) 5. | 2) 120π. | 3) 90π. | 4) $l=5$; $V=52\pi$.

15. Сфера, шар и сечения

1) 36π. | 2) 100π. | 3) 64π. | 4) $R=2\sqrt{3}$; $V=32\pi\sqrt{3}$.

16. Угол между прямыми

1) 0°. | 2) 90°. | 3) 45°. | 4) 60°.

ДЛЯ БЫСТРОЙ ПРОВЕРКИ

Краткие ответы

17. Угол между прямой и плоскостью

1) 30°. | 2) 45°. | 3) $1/\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. | 4) 45°.

18. Двугранный угол и угол между плоскостями

1) 90°. | 2) 45°. | 3) 60°. | 4) $\frac{1}{3}$.

19. Расстояние от точки до плоскости

1) 7. | 2) 5. | 3) $\frac{12}{5}$. | 4) $a/\sqrt{3} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20. Расстояние между прямыми

1) 5. | 2) 0. | 3) $6\sqrt{2}$. | 4) a.

21. Построение и площадь сечений

1) $9\sqrt{2}$. | 2) Равносторонний треугольник BDA1; площадь $8\sqrt{3}$. | 3) $4\sqrt{3}$. | 4) Сечение — прямоугольник.

22. Координаты, уравнение плоскости и оформление

1) 13. | 2) $u \perp v$. | 3) 3. | 4) $\cos\varphi = 1/\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ИТОГОВЫЕ ЗАДАЧИ · ПУНКТ Б

1. $d=\sqrt{3}$.
2. $d=\frac{12}{5}$.
3. $d=3\sqrt{2}$.
4. $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.
5. $d=\frac{12\sqrt{26}}{13}$.
6. $d=\sqrt{6}$.

Доказательства пунктов а приведены в разделе полных решений.

Источник нумерации: ФИПИ, официальный проект ЕГЭ-2027.
fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory
Комплект: 2027/ma_11_2027.zip. Дата сверки: 17.10.2026.
Все учебные задания и чертежи в этой тетради авторские.