ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

ЕГЭ-2027 · ПРОФИЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Вся планиметрия

С нуля до второй части

Углы, треугольники, четырёхугольники, окружности и доказательства — в одной рабочей тетради.

22 темы | 88 упражнений | 6 задач с пунктами а–б

НОМЕРА ЗАДАНИЙ

В проекте ФИПИ-2027 планиметрия — №1 и №18. №15 посвящён стереометрии. Эта тетрадь охватывает именно геометрию на плоскости: от базовых вычислений до доказательства и расчёта во второй части.

КАК ЗАНИМАТЬСЯ

На тему — ориентировочно 60–90 минут: теория и пример, затем четыре задания. Первые два можно разобрать на уроке, последние два — решить самостоятельно. Если тема новая, раздели её на два занятия. Итоговая задача — 35–50 минут.

Сначала попытка → затем подсказка → затем разбор.

Задачи авторские. Решения всех упражнений находятся после практики; краткие ответы — в конце. В HTML есть поля для своих решений и раскрывающиеся подсказки.

Ученик: _____

Начало: _____ Завершение: _____

ПРОГРАММА · 22 ТЕМЫ

От первых углов к доказательству

01	Точки, отрезки и углы
02	Параллельные прямые
03	Треугольник: углы и стороны
04	Равенство треугольников и доказательство
05	Равнобедренный и равносторонний треугольники
06	Прямоугольный треугольник и теорема Пифагора
07	Подобие и средняя линия
08	Медиана, биссектриса и отношения площадей
09	Синус, косинус и тангенс
10	Площади треугольников
11	Параллелограмм, прямоугольник, ромб и квадрат
12	Трапеция
13	Окружность, хорды и вписанные углы
14	Касательные и вписанная окружность
15	Вписанные четырёхугольники
16	Пересекающиеся хорды, секущие и касательная
17	Теоремы синусов и косинусов
18	Вписанная и описанная окружности треугольника
19	Правильные многоугольники, длина окружности и площадь круга
20	Координаты и векторы на плоскости
21	Дополнительные построения
22	Как писать решение второй части

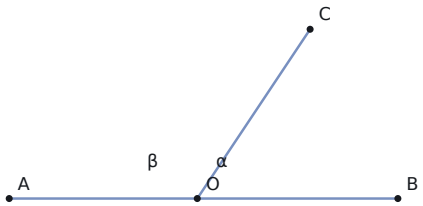
Обозначения: ∠ — угол; ∥ — параллельны; ⊥ — перпендикулярны; D∈BC — точка D на отрезке BC; S — площадь; p — полупериметр; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей.
На чертеже отмечай только данное или доказанное. Длины положительны, площади измеряются в квадратных единицах. Во второй части нужны обоснования.

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

01 Точки, отрезки и углы

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Точка задаёт положение; прямая бесконечна, луч имеет начало, отрезок — два конца. AB обозначает и отрезок, и его длину: смысл определяется контекстом. Угол ABC имеет вершину B. Острый угол меньше 90°, прямой равен 90°, тупой лежит между 90° и 180°. Биссектриса делит угол пополам. Смежные углы в сумме дают 180°, вертикальные равны.



α + β = 180°

СХЕМА К ТЕМЕ

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Смежные углы относятся как 2:3. Обозначим их 2x и 3x. Тогда 5x=180°, x=36°. Ответ: 72° и 108°. Проверка: сумма равна 180°.

Самостоятельная работа

1.1 Точка B лежит на отрезке AC; AB=7, BC=5. Найди AC.

1.2 Один из смежных углов равен 47°. Найди другой.

1.3 Биссектриса BD делит угол ABC=126°. Найди угол ABD.

1.4 Два смежных угла отличаются на 38°. Найди меньший.

02

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Параллельные прямые

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

При пересечении параллельных прямых секущей накрест лежащие и соответственные углы равны; сумма внутренних односторонних равна 180°. Обратные утверждения — признаки параллельности. Прежде чем применять свойство, установи, что прямые параллельны. Перпендикулярные одной прямой прямые параллельны друг другу.

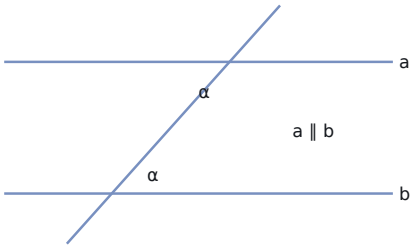


СХЕМА К ТЕМЕ

$$a \parallel b \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Две параллельные прямые пересечены секущей. Один внутренний односторонний угол 68°. Другой равен 180°−68°=112°. Здесь равенство применять нельзя: эти углы не накрест лежащие.

Самостоятельная работа

2.1 При параллельных прямых один из накрест лежащих углов равен 58°. Найди второй.

2.2 Внутренние односторонние углы при параллельных прямых относятся как 4:5. Найди их.

2.3 Две прямые пересечены секущей. Накрест лежащие углы равны 71° и 71°. Докажи параллельность.

2.4 В треугольнике ABC через B проведена прямая, параллельная AC. Угол между BA и лучом этой прямой, направленным как CA, равен 42°. Найди ∠BAC.

03

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Треугольник: углы и стороны

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Сумма углов треугольника 180°. Внешний угол равен сумме двух внутренних, не смежных с ним. Против большей стороны лежит больший угол и наоборот. Неравенство треугольника: каждая сторона меньше суммы двух других. Для третьей стороны с при известных a,b требуется $|a-b|<c<a+b$. Равенство означает вырожденную фигуру, а не треугольник.

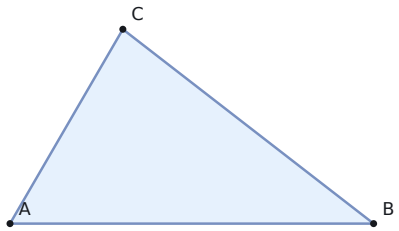


СХЕМА К ТЕМЕ

$$A + B + C = 180^\circ$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Стороны 4,7,x, где x целое. Получаем $3<x<11$, поэтому x=4,5,6,7,8,9,10. Обе границы строгие.

Самостоятельная работа

3.1 Два угла треугольника 38° и 67°. Найди третий.

3.2 Внешний угол при C равен 124°, ∠A=49°. Найди ∠B.

3.3 Могут ли 3, 4 и 8 быть сторонами треугольника?

3.4 Стороны треугольника 5, 8 и целое x. Найди все возможные x.

04

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Равенство треугольников и доказательство

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Треугольники равны по двум сторонам и углу между ними; по стороне и двум прилежащим углам; по трём сторонам. Соответствующие элементы нужно записывать в одном порядке. Доказательство строится цепочкой: дано → равные элементы → признак → нужное следствие. Равенства трёх углов недостаточно для равенства треугольников: оно даёт подобие. Прямоугольные треугольники также равны по гипотенузе и катету.

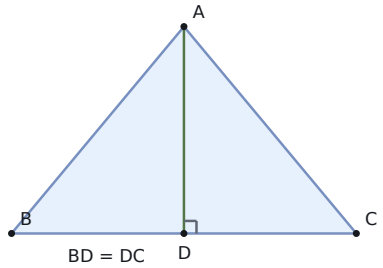


СХЕМА К ТЕМЕ

$$AB = DE,\ AC = DF,\ \angle A = \angle D$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

AB=AC, D — середина BC. В треугольниках ABD и ACD: AB=AC, BD=DC, AD общая. Они равны по трём сторонам. Поэтому ∠BDA=∠ADC; они смежные, следовательно оба по 90°.

Самостоятельная работа

4.1 AB=DE=5, AC=DF=7, ∠BAC=∠EDF=40°. Равны ли треугольники ABC и DEF?

4.2 AB=DE, ∠A=∠D, ∠B=∠E. Обоснуй BC=EF.

4.3 Два треугольника имеют углы 30°,60°,90°. Обязательно ли они равны?

4.4 AB=AC, D — середина BC. Докажи, что AD делит угол A пополам.

05

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Равнобедренный и равносторонний треугольники

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

В равнобедренном треугольнике равны углы при основании. Медиана к основанию одновременно является высотой и биссектрисой. Обратно, равенство двух углов влечёт равенство противоположных сторон. У равностороннего треугольника все углы 60°. Высота делит его на два прямоугольных треугольника.

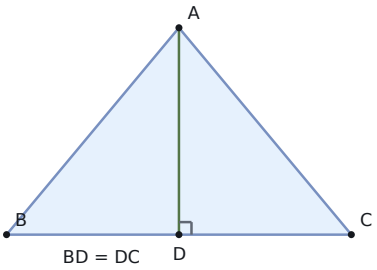


СХЕМА К ТЕМЕ

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 10, основание 12. Высота делит основание на 6 и 6. По Пифагору $h^2=10^2-6^2=64$, $h=8$. Этот расчёт подробно освоим в следующей теме.

Самостоятельная работа

5.1 В равнобедренном треугольнике угол при вершине 44°. Найди угол при основании.

5.2 AB=AC, ∠B=73°. Найди ∠A.

5.3 Периметр равнобедренного треугольника 38, основание 14. Найди боковую сторону.

5.4 AB=AC, D∈BC и AD⊥BC. Докажи BD=DC.

06

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Прямоугольный треугольник и теорема Пифагора

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Гипотенуза лежит против прямого угла и больше каждого катета. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Обратное: если для наибольшей стороны с выполнено $c^2=a^2+b^2$, угол против с прямой. Катет против 30° равен половине гипотенузы. Медиана к гипотенузе равна её половине.

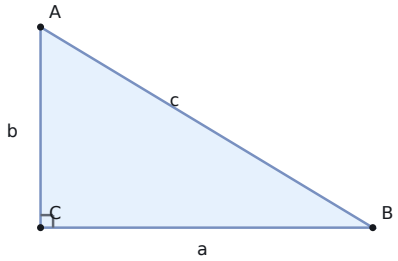


СХЕМА К ТЕМЕ

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Гипотенуза 13, катет 5. Второй катет b: $b^2=13^2-5^2=144$, $b=12$. Берём положительный корень, потому что длина положительна.

Самостоятельная работа

6.1 Катеты равны 6 и 8. Найди гипотенузу.

6.2 Гипотенуза 17, один катет 8. Найди другой.

6.3 Стороны треугольника 7,24,25. Докажи, что он прямоугольный.

6.4 В прямоугольном треугольнике острый угол 30°, гипотенуза 18. Найди оба катета.

07

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Подобие и средняя линия

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Подобные треугольники имеют равные соответствующие углы и пропорциональные стороны. Признаки: два угла; две пропорциональные стороны и равный угол между ними; три пропорциональные стороны. Если линейный коэффициент подобия k, отношение периметров k, площадей k^2. Средняя линия треугольника соединяет середины двух сторон, параллельна третьей и равна её половине.

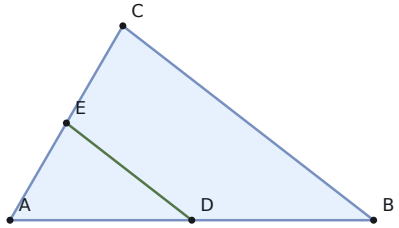


СХЕМА К ТЕМЕ

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = k, \quad \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

D∈AB, E∈AC, DE∥BC, AD:AB=2:5, BC=15. Треугольники ADE и ABC подобны по двум углам. $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$, значит DE=6. Их площади относятся как 4:25.

Самостоятельная работа

7.1 Средняя линия треугольника параллельна стороне 18. Найди её длину.

7.2 D∈AB, E∈AC, DE∥BC; AD=3, DB=6, BC=12. Найди DE.

7.3 Соответствующие стороны подобных треугольников относятся как 3:5. Площадь меньшего 27. Найди площадь большего.

7.4 D и E — середины AB и AC. Докажи, что площадь ADE составляет четверть площади ABC.

08

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Медиана, биссектриса и отношения площадей

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Медиана соединяет вершину с серединой противоположной стороны и делит площадь пополам. Три медианы пересекаются в центре тяжести и делятся им в отношении 2:1 от вершины. Внутренняя биссектриса AD делит сторону BC в отношении BD:DC=AB:AC. У треугольников с общей высотой площади относятся как основания.

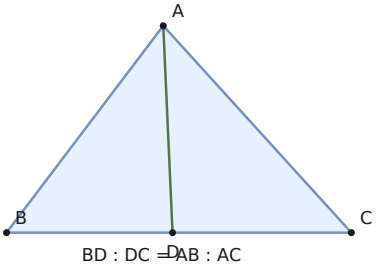


СХЕМА К ТЕМЕ

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC},\qquad \frac{AG}{GD}=2$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

AB=6, AC=9, BC=10; AD — биссектриса. BD:DC=2:3. Всего 5 долей по 2, значит BD=4, DC=6. Не путай это с медианой: части не обязаны быть равными.

Самостоятельная работа

8.1 Медиана AD делит треугольник площади 48. Найди площадь ABD.

8.2 Медиана AD=15, G — точка пересечения медиан. Найди AG и GD.

8.3 AB=8, AC=12, BC=15. Биссектриса AD пересекает BC в D. Найди BD и DC.

8.4 D∈BC, BD:DC=3:4, площадь ABC равна 56. Найди площадь ABD.

09

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Синус, косинус и тангенс

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

В прямоугольном треугольнике sin α — отношение противолежащего катета к гипотенузе; cos α — прилежащего катета к гипотенузе; tg α — противолежащего катета к прилежащему. Для острого угла все три значения положительны. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Для углов 30°,45°,60° синусы равны $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$; косинусы — в обратном порядке.

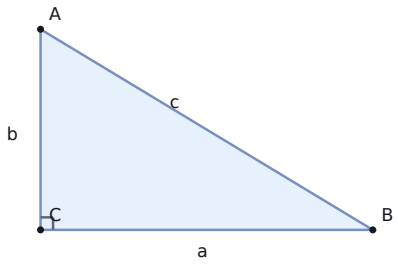


СХЕМА К ТЕМЕ

$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\quad \cos\alpha=\frac{b}{c},\quad \tan\alpha=\frac{a}{b}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Гипотенуза 10, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Противолежащий катет равен $10\cdot\frac{3}{5}=6$. Прилежащий катет $\sqrt{(100-36)}=8$, поэтому $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$.

Самостоятельная работа

9.1 В прямоугольном ABC угол C прямой, AC=8, BC=6, AB=10. Найди sin A.

9.2 Гипотенуза 14, острый угол 60°. Найди прилежащий к нему катет.

9.3 Острый угол α имеет $\cos\alpha=\frac{12}{13}$. Найди sin α.

9.4 В прямоугольном треугольнике $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, гипотенуза 20. Найди катеты.

10

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Площади треугольников

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту к нему. Высота перпендикулярна прямой основания и может падать на продолжение стороны. Также S= $\frac{(ab \cdot sinC)}{2}$ для двух сторон и угла между ними. Формула Герона использует три стороны и полупериметр p. Единицы площади квадратные: при увеличении длин в k раз площадь увеличивается в k² раз.

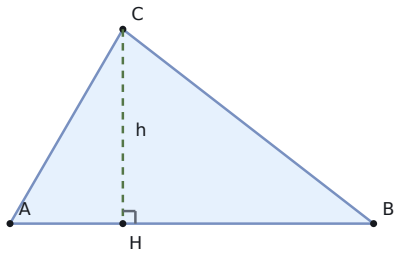


СХЕМА К ТЕМЕ

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{ab\sin C}{2}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Стороны 13,14,15. Полупериметр p=21. По Герону S=√(21·8·7·6)=84. Высота к стороне 14: h=2S/14=12.

Самостоятельная работа

10.1 Основание треугольника 12, высота к нему 7. Найди площадь.

10.2 Площадь 54, сторона 12. Найди высоту к этой стороне.

10.3 Две стороны 8 и 10, угол между ними 30°. Найди площадь.

10.4 Найди площадь треугольника со сторонами 5,5,6 двумя способами.

11

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Параллелограмм, прямоугольник, ромб и квадрат

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

У параллелограмма противоположные стороны и углы равны, диагонали делятся точкой пересечения пополам. Его площадь ah=ab·sin α. Прямоугольник имеет четыре прямых угла и равные диагонали. Ромб имеет четыре равные стороны; его диагонали перпендикулярны и делят углы пополам. Квадрат объединяет свойства прямоугольника и ромба.

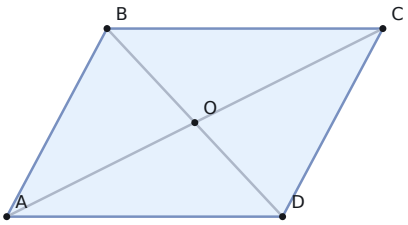


СХЕМА К ТЕМЕ

$$S = ah, \quad S_{\text{ромба}} = \frac{d_1 d_2}{2}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Диагонали ромба 10 и 24. Их половины 5 и 12 образуют прямоугольный треугольник со стороной ромба: a=13. Площадь $10\cdot\frac{24}{2}=120$; высота $\frac{120}{13}$.

Самостоятельная работа

11.1 Стороны прямоугольника 9 и 12. Найди диагональ.

11.2 Сторона параллелограмма 14, высота к ней 5. Найди площадь.

11.3 Диагонали ромба 16 и 30. Найди его сторону и площадь.

11.4 В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в O. Докажи, что треугольники AOB и COD равны.

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

12 Трапеция

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

В этой тетради трапеция — четырёхугольник с одной парой параллельных противоположных сторон, называемых основаниями. Средняя линия соединяет середины боковых сторон и равна полусумме оснований. Площадь равна произведению средней линии на высоту. У равнобедренной трапеции равны боковые стороны, углы при каждом основании и диагонали. Высоты от концов меньшего основания отсекают на большем равные отрезки.

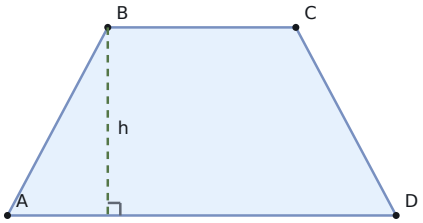


СХЕМА К ТЕМЕ

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad S = \frac{(a+b)h}{2}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Основания равнобедренной трапеции 18 и 8, боковая сторона 13. Горизонтальная проекция каждой боковой стороны $\frac{(18-8)}{2}=5$. Высота $\sqrt{(169-25)}=12$. Площадь $(18+8)\cdot\frac{12}{2}=156$.

Самостоятельная работа

12.1 Основания трапеции 7 и 15. Найди среднюю линию.

12.2 Основания 6 и 14, высота 9. Найди площадь.

12.3 Равнобедренная трапеция имеет основания 16 и 10, боковую сторону 5. Найди высоту и площадь.

12.4 В трапеции ABCD основания AD∥BC, AD=15, BC=6. Диагонали пересекаются в O. Найди AO:OC.

13

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Окружность, хорды и вписанные углы

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Окружность состоит из точек на расстоянии R от центра. Диаметр равен 2R. Вписанный угол имеет вершину на окружности и равен половине дуги, на которую опирается, не содержащей вершину. Центральный угол равен градусной мере соответствующей дуги. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Угол, опирающийся на диаметр, прямой. Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам.

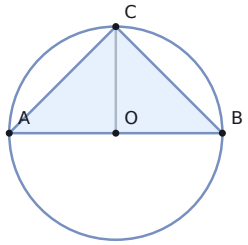


СХЕМА К ТЕМЕ

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\text{дуги } AB$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Радиус 5, расстояние от центра до хорды 3. Половина хорды равна $\sqrt{(25-9)}=4$, поэтому длина хорды 8. Прямой угол возникает между радиусом-перпендикуляром и хордой.

Самостоятельная работа

13.1 Дуга AB, не содержащая C, равна 112°. Найди вписанный угол ACB.

13.2 AB — диаметр, C лежит на окружности, $\angle CAB=37°$. Найди $\angle ABC$.

13.3 Радиус окружности 13, расстояние от центра до хорды 5. Найди хорду.

13.4 A,B,C,D лежат на окружности; C и D находятся по одну сторону от прямой AB. Докажи $\angle ACB=\angle ADB$.

14

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Касательные и вписанная окружность

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Касательная имеет с окружностью одну общую точку и перпендикулярна радиусу в точке касания. Отрезки касательных, проведённых из одной внешней точки, равны. Центр вписанной в треугольник окружности лежит на биссектрисах и равноудалён от сторон. Если окружность касается всех сторон выпуклого четырёхугольника, суммы противоположных сторон равны. Обратное без дополнительных условий здесь не используем. Угол между касательной и хордой равен половине дуги, заключённой внутри этого угла.

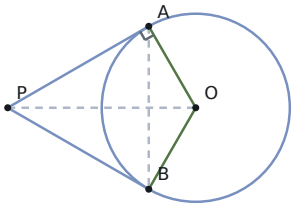


СХЕМА К ТЕМЕ

$$PA = PB, \quad OA \perp PA$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Из P проведена касательная PT к окружности центра O: OP=13, R=5. В прямоугольном OPT: PT=√(169−25)=12. Корень возникает из Пифагора, а не из равенства OP и PT.

Самостоятельная работа

14.1 Из P проведены касательные PA и PB. PA=9. Найди PB.

14.2 OP=10, радиус 6, PT — касательная. Найди PT.

14.3 В выпуклый четырёхугольник ABCD вписана окружность. AB=6, BC=9, CD=8. Найди AD.

14.4 Окружность касается AB,BC,CA треугольника со сторонами AB=13, BC=14, CA=15. Найди длины отрезков касательных из A, B, C.

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

15 Вписанные четырёхугольники

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Четырёхугольник вписан в окружность, если все его вершины лежат на ней. У выпуклого вписанного четырёхугольника сумма противоположных углов равна 180°. Обратно, если сумма противоположных углов выпуклого четырёхугольника 180°, его можно вписать в окружность. Частый приём: два прямых угла показывают, что точки лежат на окружности с общим диаметром.

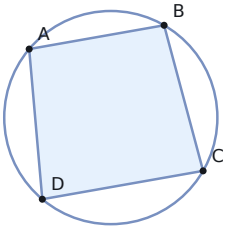


СХЕМА К ТЕМЕ

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

В остроугольном ABC высоты BD и CE пересекают AC и AB. Углы BDC и BEC прямые. Поэтому D и E лежат на окружности с диаметром BC, и B,C,D,E — четыре точки одной окружности.

Самостоятельная работа

15.1 ABCD — вписанный выпуклый четырёхугольник, ∠A=72°. Найди ∠C.

15.2 Выпуклый четырёхугольник имеет ∠B=83°, ∠D=97°. Можно ли описать около него окружность?

15.3 ABCD вписан в окружность, ∠A:∠C=2:3. Найди эти углы.

15.4 В остроугольном ABC точки D∈AC и E∈AB — основания высот из B и C. Докажи, что B,C,D,E лежат на одной окружности.

16

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Пересекающиеся хорды, секущие и касательная

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Если хорды AB и CD пересекаются внутри окружности в P, то PA·PB=PC·PD. Для внешней точки P и двух секущих PAB и PCD верно то же произведение: внешний отрезок умножают на всю секущую до дальней точки. Если PT — касательная, то PT^2=PA·PB. Это варианты теоремы о степени точки; в задачах всегда уточняй порядок точек.

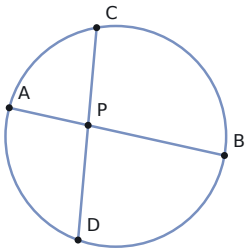


СХЕМА К ТЕМЕ

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad ; \quad PT^2 = PA \cdot PB$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

На секущей точки идут P,A,B; PA=4, AB=5. Полная секущая PB=9, а не 5. Поэтому касательная PT=√(PA·PB)=√36=6.

Самостоятельная работа

16.1 Хорды AB и CD пересекаются в P. PA=3, PB=8, PC=4. Найди PD.

16.2 Из P проведена секущая PAB: PA=5, AB=15. Найди касательную PT.

16.3 Из P проведены секущие PAB и PCD. PA=4, PB=18, PC=6. Найди CD.

16.4 Хорды AB и CD пересекаются в P. Докажи PA·PB=PC·PD.

17

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Теоремы синусов и косинусов

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Теорема косинусов заменяет Пифагора, когда угол не прямой: $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$. Здесь C — угол между a и b. Теорема синусов: сторона, делённая на синус противолежащего угла, равна диаметру описанной окружности. По двум сторонам и углу, не лежащему между ними, возможны два треугольника: острый и тупой варианты требуют проверки.

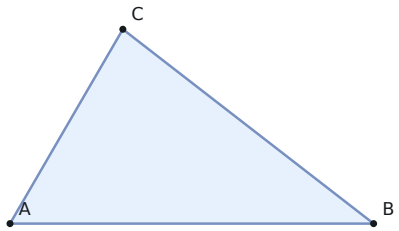


СХЕМА К ТЕМЕ

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Стороны 5 и 8 образуют угол 60°. Третья сторона c: $c^2=25+64-2\cdot5\cdot8\cdot\frac{1}{2}=49$, $c=7$. Сначала убедились, что дан угол между известными сторонами.

Самостоятельная работа

17.1 Две стороны 6 и 10 образуют угол 60°. Найди третью сторону.

17.2 Сторона a=12 лежит против угла 30°. Найди радиус описанной окружности.

17.3 В треугольнике a=6, ∠A=30°, ∠B=45°. Найди b.

17.4 Стороны треугольника 5,7,8. Найди косинус угла против стороны 8.

18

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Вписанная и описанная окружности треугольника

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Вписанная окружность касается сторон, её центр — пересечение биссектрис. Описанная проходит через вершины, её центр — пересечение серединных перпендикуляров; он может лежать вне треугольника. Если p — полупериметр, то S=pr. Также $S=\frac{abc}{(4R)}$. У прямоугольного треугольника центр описанной окружности — середина гипотенузы. Не путай r и R.

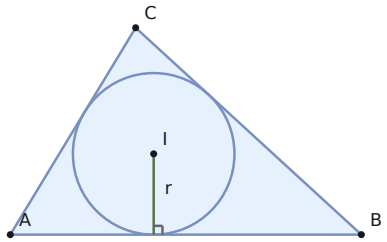


СХЕМА К ТЕМЕ

$$r=\frac{S}{p},\quad R=\frac{abc}{4S}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

У треугольника 6,8,10 площадь S=24, p=12. Вписанный радиус r= $\frac{24}{12}$ =2. Описанный радиус R= $\frac{10}{2}$ =5, потому что треугольник прямоугольный.

Самостоятельная работа

18.1 Площадь треугольника 30, периметр 30. Найди r.

18.2 Прямоугольный треугольник имеет катеты 5 и 12. Найди R и r.

18.3 Стороны треугольника 13,14,15. Найди радиусы r и R.

18.4 Докажи формулу S=pr для треугольника с вписанной окружностью.

19

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Правильные многоугольники, длина окружности и площадь круга

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Правильный многоугольник имеет равные стороны и углы. Соединив центр с соседними вершинами, получаем равнобедренный треугольник с центральным углом 360°/n. Перпендикуляр из центра к стороне делит его пополам. У правильного шестиугольника сторона равна R. Длина окружности 2πR, площадь круга πR²; сектор занимает ту же долю площади, какую его угол составляет от 360°.

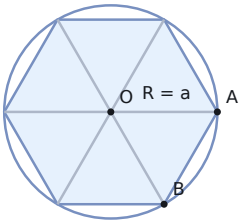


СХЕМА К ТЕМЕ

$$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \quad S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Правильный шестиугольник со стороной 4 разбивается на шесть равносторонних треугольников. Каждый имеет площадь $4^2\frac{\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$. Общая площадь $24\sqrt{3}$.

Самостоятельная работа

19.1 Радиус круга 3. Найди длину окружности и площадь круга.

19.2 Радиус круга 6, угол сектора 60°. Найди его площадь.

19.3 Квадрат вписан в окружность радиуса 5. Найди его сторону и площадь.

19.4 Правильный шестиугольник имеет сторону 6. Найди радиус вписанной окружности и площадь.

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

20 Координаты и векторы на плоскости

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Координаты полезны, когда есть прямой угол, середины и параллельные стороны. Расстояние AB находят по Пифагору; координаты середины — средние арифметические. Вектор $AB=(xB-xA, yB-yA)$. Скалярное произведение $u\cdot v=u_x v_x+u_y v_y$: для ненулевых векторов оно равно 0 при перпендикулярности. Метод должен сохранять общность: нельзя произвольно объявлять общий треугольник прямоугольным.

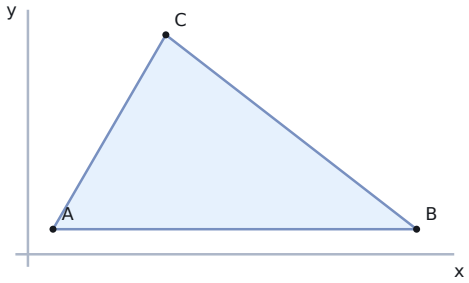


СХЕМА К ТЕМЕ

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

A=(0,0), B=(8,0), C=(2,6). Середина AB — M=(4,0), поэтому $CM=\sqrt{[(4-2)^2+6^2]}=2\sqrt{10}$. Высота к AB равна 6, значит площадь $ABC=8\cdot\frac{6}{2}=24$.

Самостоятельная работа

20.1 A=(1,2), B=(7,10). Найди AB.

20.2 A=(−2,5), B=(8,1). Найди середину AB.

20.3 A=(0,0), B=(6,0), C=(2,5). Найди площадь ABC.

20.4 Векторы u=(2,3), v=(6,−4). Докажи их перпендикулярность.

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

21 Дополнительные построения

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

Полезное построение должно создавать знакомую конфигурацию. Высота даёт Пифагора или тригонометрию; параллельная прямая — подобие; соединение с центром — равные радиусы; общий диаметр — прямые углы; продолжение стороны — внешний угол. Перед построением спроси: какое утверждение я хочу применить? На чертеже обязательно обозначь новую точку и запиши, как она выбрана.

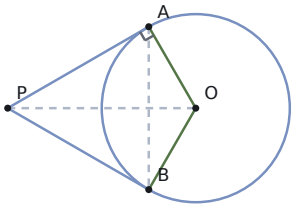


СХЕМА К ТЕМЕ

Высота ⇒ Пифагор

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Чтобы найти высоту равнобедренной трапеции, опускаем два перпендикуляра от меньшего основания. Получаются прямоугольник и два равных прямоугольных треугольника. Разность оснований делится на две равные проекции.

Самостоятельная работа

21.1 В равнобедренном ABC: AB=AC=13, BC=10. Проведи полезное построение и найди высоту к BC.

21.2 Хорда AB длиной 16 лежит в окружности радиуса 10. Найди расстояние от центра до хорды.

21.3 В ABC точка D — середина AB. Через D проведена прямая DE∥BC, E∈AC. Докажи, что E — середина AC.

21.4 Окружность касается сторон угла 60° в A и B; центр O, вершина P, радиус 3. Найди OP и AB.

22

ТЕОРИЯ · ЧЕРТЁЖ · ПРАКТИКА

Как писать решение второй части

ТЕОРИЯ · РАЗБЕРИСЬ

В доказательстве нельзя ссылаться на то, что «видно на рисунке». Каждый существенный переход сопровождай основанием: равные углы, признак подобия, свойство касательной. В вычислительном пункте введи переменную, получи уравнение, отбрось недопустимые значения и ответь на вопрос. Если используешь результат пункта а, назови его. Полезен обратный поиск: что достаточно доказать для нужного равенства?

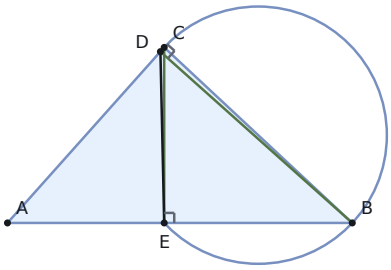


СХЕМА К ТЕМЕ

Дано ⇒ основание ⇒ вывод

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ

Нужно доказать DE∥BC, если D,E — середины AB,AC. Пишем: «DE соединяет середины двух сторон треугольника ABC, следовательно является средней линией. По теореме о средней линии DE∥BC». Названа причина, а не только результат.

Самостоятельная работа

22.1 Ученик написал: «AD — медиана, поэтому AD⊥BC». Найди ошибку.

22.2 Ученик написал: «ABCD вписан в окружность, поэтому AB+CD=BC+AD». Исправь утверждение.

22.3 В остроугольном ABC высоты BD и CE. Докажи ∠BDE=∠BCE.

22.4 У прямоугольного треугольника катеты x и x+7, гипотенуза 13. Составь полное решение для нахождения катетов.

1

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

Высота к гипотенузе

УСЛОВИЕ

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. CD — высота к гипотенузе AB. AC=5, BC=12.

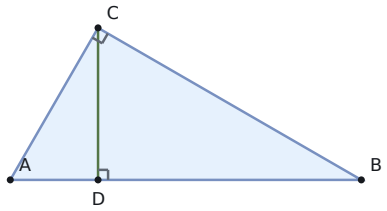


СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи $CD^2=AD\cdot DB$.

б) Найди CD, AD и DB.

2

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

Биссектриса и длина отрезка

УСЛОВИЕ

В треугольнике ABC: AB=10, AC=15, BC=20. Биссектриса AD пересекает BC в D.

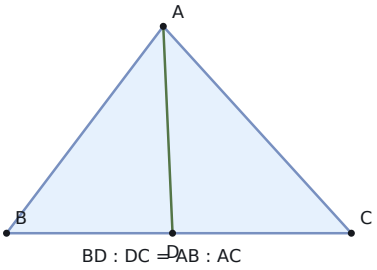


СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что площади ABD и ACD относятся как 2:3.

б) Найди AD.

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

3 Диагонали равнобедренной трапеции

УСЛОВИЕ

В равнобедренной трапеции ABCD основания AD=18 и BC=8, боковые стороны AB=CD=13. Диагонали AC и BD пересекаются в O.

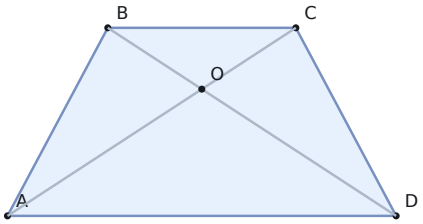


СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи AO:OC=9:4.

б) Найди площадь треугольника AOD.

4

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

Две касательные

УСЛОВИЕ

Из внешней точки P к окружности с центром O и радиусом 6 проведены касательные PA и PB. Угол APB равен 60°.

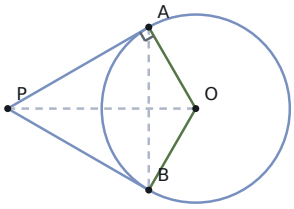


СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что OP — серединный перпендикуляр к AB.

б) Найди площадь треугольника PAB.

5

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

Основания высот и скрытая окружность

УСЛОВИЕ

Треугольник ABC остроугольный; AB=13, AC=15, BC=14. D∈AC и E∈AB — основания высот из B и C соответственно.

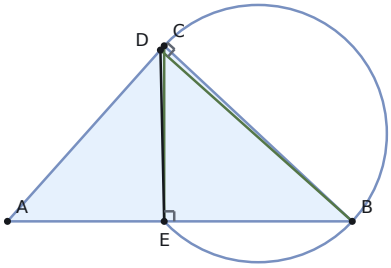


СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что B,C,D,E лежат на одной окружности.

б) Найди DE.

6

ИТОГОВАЯ ЗАДАЧА · 35–50 МИНУТ

Середина дуги и центр вписанной окружности

УСЛОВИЕ

В треугольнике ABC углы B и C равны 70° и 50°. Биссектриса AI пересекает описанную окружность повторно в M; I — центр вписанной окружности. Радиус описанной окружности R=10.

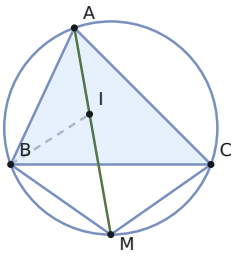


СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи MB=MC=MI.

б) Найди MI.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 01

Точки, отрезки и углы

1.1. Ответ: 12.

Поскольку B между A и C, AC=AB+BC=7+5=12.

1.2. Ответ: 133°.

Другой угол равен 180°−47°=133°.

1.3. Ответ: 63°.

∠ABD=∠DBC=126°:2=63°.

1.4. Ответ: 71°.

Пусть меньший x, больший x+38°. Тогда 2x+38°=180°, x=71°. Второй 109°; разность 38°.

ТЕМА 02

Параллельные прямые

2.1. Ответ: 58°.

По свойству накрест лежащих углов при параллельных прямых второй угол также 58°.

2.2. Ответ: 80° и 100°.

Пусть углы 4x и 5x. Тогда 9x=180°, x=20°. Получаем 80° и 100°.

2.3. Ответ: Прямые параллельны.

Равенство накрест лежащих углов — признак параллельности прямых, поэтому искомая параллельность доказана.

2.4. Ответ: 42°.

Лучи BA и указанный параллельный луч направлены противоположно лучам AB и AC соответственно. Одновременная замена направлений обеих сторон сохраняет угол; ∠BAC=42°.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 03

Треугольник: углы и стороны

3.1. Ответ: 75°.

$\angle C = 180° - 38° - 67° = 75°$.

3.2. Ответ: 75°.

$124° = 49° + \angle B$, поэтому $\angle B = 75°$.

3.3. Ответ: Нет.

$3 + 4 = 7 < 8$: неравенство треугольника нарушено.

3.4. Ответ: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

$|8 - 5| < x < 8 + 5$, то есть $3 < x < 13$. Все целые от 4 до 12 удовлетворяют обеим границам.

ТЕМА 04

Равенство треугольников и доказательство

4.1. Ответ: Да.

$AB = DE$, $AC = DF$ и углы между этими сторонами равны. Применим первый признак равенства; соответствие $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$.

4.2. Ответ: BC=EF.

Треугольники ABC и DEF равны по стороне $AB = DE$ и двум прилежащим углам. Поэтому соответствующие стороны BC и EF равны.

4.3. Ответ: Нет.

Треугольники со сторонами $1, \sqrt{3}, 2$ и $2, 2\sqrt{3}, 4$ имеют одинаковые углы, но разные стороны. Это контрпример.

4.4. Ответ: AD — биссектриса.

$AB = AC$ по условию, $BD = DC$ по определению середины, AD общая. Поэтому ABD и ACD равны по трём сторонам. Соответствующие углы BAD и DAC равны.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 05

Равнобедренный и равносторонний треугольники

5.1. Ответ: 68°.

Сумма углов при основании 180°−44°=136°. Каждый равен 136°:2=68°.

5.2. Ответ: 34°.

∠C=73°, поэтому ∠A=180°−146°=34°.

5.3. Ответ: 12.

Пусть боковая сторона x. 2x+14=38, x=12. Неравенство 12+12>14 выполнено.

5.4. Ответ: BD=DC.

В прямоугольных ABD и ACD гипотенузы AB и AC равны, катет AD общий. Треугольники равны по гипотенузе и катету, значит BD=DC.

ТЕМА 06

Прямоугольный треугольник и теорема Пифагора

6.1. Ответ: 10.

$c^2=36+64=100$, c=10.

6.2. Ответ: 15.

$b^2=17^2-8^2=289-64=225$, b=15.

6.3. Ответ: Угол против стороны 25 прямой.

$7^2+24^2=49+576=625=25^2$. По обратной теореме Пифагора угол между сторонами 7 и 24 равен 90°.

6.4. Ответ: 9 и 9√3.

Напротив 30° лежит катет 18:2=9. Другой равен $\sqrt{(18^2-9^2)}=\sqrt{243}=9\sqrt{3}$.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 07

Подобие и средняя линия

7.1. Ответ: 9.

Средняя линия равна 18:2=9.

7.2. Ответ: 4.

AB=3+6=9. По подобию ADE и ABC: $\frac{DE}{12}=\frac{3}{9}$, откуда DE=4.

7.3. Ответ: 75.

$\frac{27}{S}=\frac{9}{25}$, поэтому $S=27\cdot\frac{25}{9}=75$.

7.4. Ответ: S(ADE)=S(ABC)/4.

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$ и угол A общий, значит треугольники подобны по двум сторонам и углу. Отношение площадей равно $(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$.

ТЕМА 08

Медиана, биссектриса и отношения площадей

8.1. Ответ: 24.

S(ABD)=S(ACD); сумма площадей 48, поэтому каждая равна 24.

8.2. Ответ: AG=10, GD=5.

AG:GD=2:1. Одна доля 15:3=5, значит AG=10, GD=5.

8.3. Ответ: BD=6, DC=9.

BD:DC=AB:AC=2:3. Сумма 15, поэтому части равны $15\cdot\frac{2}{5}=6$ и $15\cdot\frac{3}{5}=9$.

8.4. Ответ: 24.

Высоты к прямой BC одинаковы, значит площади ABD и ACD относятся как 3:4. $S(ABD)=56\cdot\frac{3}{7}=24$.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 09

Синус, косинус и тангенс

9.1. Ответ: $\frac{3}{5}$.
$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

9.2. Ответ: 7.
Прилежащий катет равен $14 \cdot \cos 60° = \frac{14}{2} = 7$.

9.3. Ответ: $\frac{5}{13}$.
$\sin^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$. Угол острый, поэтому $\sin\alpha = \frac{5}{13}$.

9.4. Ответ: 12 и 16.
Пусть катеты $3x$ и $4x$. По Пифагору $25x^2 = 400$, $x = 4$. Получаем 12 и 16.

ТЕМА 10

Площади треугольников

10.1. Ответ: 42.
$S = 12 \cdot \frac{7}{2} = 42$.

10.2. Ответ: 9.
$h = 2S/a = \frac{108}{12} = 9$.

10.3. Ответ: 20.
$S = 8 \cdot 10 \cdot \sin 30°/2 = \frac{80}{4} = 20$.

10.4. Ответ: 12.
Высота к основанию 6 делит его на 3 и 3; $h = \sqrt{(25 - 9)} = 4$, $S = 6 \cdot \frac{4}{2} = 12$. По Герону $p = 8$, $S = \sqrt{(8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2)} = 12$.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 11

Параллелограмм, прямоугольник, ромб и квадрат

11.1. Ответ: 15.

Диагональ является гипотенузой: $d=\sqrt{(9^2+12^2)}=\sqrt{225}=15$.

11.2. Ответ: 70.

$S=ah=14\cdot5=70$.

11.3. Ответ: Сторона 17; площадь 240.

Диагонали ромба перпендикулярны и делятся пополам. Сторона $\sqrt{(8^2+15^2)}=17$. Площадь $16\cdot\frac{30}{2}=240$.

11.4. Ответ: Треугольники равны.

$AO=OC$ и $BO=OD$ по свойству диагоналей параллелограмма. $\angle AOB=\angle COD$ как вертикальные. Следовательно AOB и COD равны по двум сторонам и углу между ними.

ТЕМА 12

Трапеция

12.1. Ответ: 11.

$m=\frac{(7+15)}{2}=11$.

12.2. Ответ: 90.

$S=(6+14)\cdot\frac{9}{2}=90$.

12.3. Ответ: Высота 4; площадь 52.

Опускаем высоты от концов меньшего основания. Проекция каждой боковой стороны $\frac{(16-10)}{2}=3$. $h=\sqrt{(25-9)}=4$, $S=13\cdot4=52$.

12.4. Ответ: 5:2.

$\angle AOD=\angle COB$ вертикальные, $\angle ADO=\angle CBO$ накрест лежащие. Треугольники подобны, $\frac{AO}{OC}=\frac{AD}{BC}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 13

Окружность, хорды и вписанные углы

13.1. Ответ: 56°.

$\angle ACB = 112°/2 = 56°$.

13.2. Ответ: 53°.

$\angle ACB = 90°$, поэтому $\angle ABC = 180° - 90° - 37° = 53°$.

13.3. Ответ: 24.

Перпендикуляр из центра делит хорду пополам. Половина равна $\sqrt{(169 - 25)} = 12$, вся хорда 24.

13.4. Ответ: Углы равны.

Дуга AB, не содержащая C, не содержит и D, потому что C и D лежат на одной стороне хорды. Оба вписанных угла равны половине этой дуги.

ТЕМА 14

Касательные и вписанная окружность

14.1. Ответ: 9.

PA = PB по теореме об отрезках касательных, значит PB = 9.

14.2. Ответ: 8.

$PT^2 = OP^2 - OT^2 = 100 - 36 = 64$, PT = 8.

14.3. Ответ: 5.

6 + 8 = 9 + AD, поэтому AD = 5.

14.4. Ответ: Из A — 7, из B — 6, из C — 8.

$x + y = 13$, $y + z = 14$, $z + x = 15$. Суммируя, $2(x + y + z) = 42$, $x + y + z = 21$. Тогда $x = 21 - 14 = 7$, $y = 21 - 15 = 6$, $z = 21 - 13 = 8$.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 15

Вписанные четырёхугольники

15.1. Ответ: 108°.

$\angle C = 180° - 72° = 108°$.

15.2. Ответ: Да.

$83° + 97° = 180°$. По признаку вписанного четырёхугольника все четыре вершины лежат на окружности.

15.3. Ответ: 72° и 108°.

Пусть $\angle A = 2x$, $\angle C = 3x$. $5x = 180°$, $x = 36°$. Получаем 72° и 108°.

15.4. Ответ: Окружность с диаметром BC.

$BD \perp AC$ и $CE \perp AB$, поэтому $\angle BDC = \angle BEC = 90°$. Множество точек, из которых BC виден под прямым углом, — окружность с диаметром BC. Следовательно D и E лежат на ней вместе с B и C.

ТЕМА 16

Пересекающиеся хорды, секущие и касательная

16.1. Ответ: 6.

$3 \cdot 8 = 4 \cdot PD$, значит $PD = 6$.

16.2. Ответ: 10.

$PB = PA + AB = 20$. $PT^2 = 5 \cdot 20 = 100$, $PT = 10$.

16.3. Ответ: 6.

$4 \cdot 18 = 6 \cdot PD$, $PD = 12$. При порядке P,C,D отрезок $CD = PD - PC = 12 - 6 = 6$.

16.4. Ответ: Равенство доказано.

$\angle APC = \angle DPB$ вертикальные. $\angle PAC = \angle PDB$, поскольку это вписанные углы BAC и CDB, опирающиеся на дугу BC. Треугольники APC и DPB подобны; $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$. Перемножение даёт $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 17

Теоремы синусов и косинусов

17.1. Ответ: 2√19.

$c^2=36+100-60=76$, $c=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$.

17.2. Ответ: 12.

$12=2R\cdot\frac{1}{2}=R$, поэтому $R=12$.

17.3. Ответ: 6√2.

$b=6\cdot\frac{(\sqrt{2}/2)}{(1/2)}=6\sqrt{2}$.

17.4. Ответ: $\frac{1}{7}$.

$8^2=5^2+7^2-2\cdot5\cdot7\cdot\cos C$. Поэтому $\cos C=\frac{(25+49-64)}{70}=\frac{10}{70}=\frac{1}{7}$.

ТЕМА 18

Вписанная и описанная окружности треугольника

18.1. Ответ: 2.

$p=\frac{30}{2}=15$, $r=\frac{S}{p}=\frac{30}{15}=2$.

18.2. Ответ: R= $\frac{13}{2}$; r=2.

$c=\sqrt{(25+144)}=13$. $R=\frac{c}{2}=\frac{13}{2}$. $r=\frac{(5+12-13)}{2}=2$.

18.3. Ответ: r=4; R= $\frac{65}{8}$.

$p=21$, $S=\sqrt{(21\cdot8\cdot7\cdot6)}=84$. $r=\frac{84}{21}=4$; $R=13\cdot14\cdot\frac{15}{(4\cdot84)}=\frac{65}{8}$.

18.4. Ответ: S=pr.

Центр I соединяем с A,B,C. Высоты трёх треугольников IAB, IBC, ICA к сторонам исходного треугольника равны радиусу r. Складываем площади: $S=(AB+BC+CA)\frac{r}{2}=pr$.

✓

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 19

Правильные многоугольники, длина окружности и площадь круга

19.1. Ответ: 6π и 9π.

Длина $2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Площадь $\pi \cdot 3^2 = 9\pi$.

19.2. Ответ: 6π.

$S = \pi \cdot 36 \cdot \frac{60}{360} = 6\pi$.

19.3. Ответ: Сторона 5√2; площадь 50.

Диагональ квадрата $2R = 10$. Сторона $a = 10/\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, площадь $a^2 = 50$.

19.4. Ответ: r=3√3; S=54√3.

Центральный угол 60°, шесть центральных треугольников равносторонние со стороной 6. Апофема $r = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. $S = 6 \cdot 6^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$.

ТЕМА 20

Координаты и векторы на плоскости

20.1. Ответ: 10.

$AB = \sqrt{[(7-1)^2 + (10-2)^2]} = \sqrt{(36+64)} = 10$.

20.2. Ответ: (3,3).

$M = (\frac{(-2+8)}{2}, \frac{(5+1)}{2}) = (3,3)$.

20.3. Ответ: 15.

$AB = 6$; расстояние C до оси x равно 5. $S = 6 \cdot \frac{5}{2} = 15$.

20.4. Ответ: u⊥v.

$u \cdot v = 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-4) = 12 - 12 = 0$. Оба вектора ненулевые, поэтому они перпендикулярны.

✓

СРАВНИ НЕ ТОЛЬКО ОТВЕТ, НО И ХОД МЫСЛИ

Решения и обоснования

ТЕМА 21

Дополнительные построения

21.1. Ответ: 12.

Высота AD к основанию является медианой, BD=DC=5. По Пифагору $AD=\sqrt{(13^2-5^2)}=12$.

21.2. Ответ: 6.

OM делит хорду пополам, AM=8. В прямоугольном OMA: $OM=\sqrt{(10^2-8^2)}=6$.

21.3. Ответ: AE=EC.

∠A общий, ∠ADE=∠ABC вследствие параллельности. Поэтому $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$. Значит $AE=\frac{AC}{2}$ и $EC=AC-AE=\frac{AC}{2}$.

21.4. Ответ: OP=6; AB=3√3.

OA⊥PA, OB⊥PB. Прямоугольные OAP и OBP равны по гипотенузе OP и катетам OA=OB, значит OP — биссектриса: ∠APO=30°. OP=OA/sin30°=6. Углы A и B в PAOB прямые, поэтому ∠AOB=120°. В равнобедренном AOB хорда $AB=2\cdot3\cdot\sin60°=3\sqrt{3}$.

ТЕМА 22

Как писать решение второй части

22.1. Ответ: Медиана не обязательно является высотой.

Определение медианы даёт только BD=DC. Перпендикулярность следует, например, если дополнительно AB=AC. В произвольном треугольнике её может не быть.

22.2. Ответ: Для вписанного: ∠A+∠C=180°.

Равенство сумм противоположных сторон относится к описанному около окружности четырёхугольнику: все его стороны касаются окружности. У вписанного в окружность четырёхугольника используется сумма противоположных углов: ∠A+∠C=180°.

22.3. Ответ: Углы равны.

Углы BDC и BEC прямые, поэтому B,C,D,E лежат на окружности с диаметром BC. Точки D и C лежат на одной стороне хорды BE, следовательно вписанные углы BDE и BCE опираются на одну дугу BE и равны.

22.4. Ответ: 5 и 12.

Пусть x>0 — меньший катет. Тогда $x^2+(x+7)^2=169$, откуда $x^2+7x-60=0$, $(x-5)(x+12)=0$. Корень −12 не подходит как длина. x=5, второй катет 12. Проверка: 25+144=169.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

1 Высота к гипотенузе

СХЕМА К ТЕМЕ

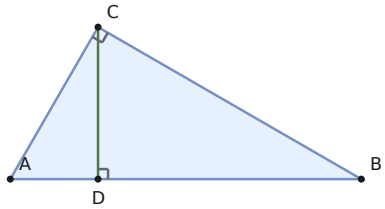


Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи $CD^2=AD\cdot DB$.

$CD^2=AD\cdot DB$.

$\angle ADC=\angle CDB=90°$. Углы CAD и BCD равны: каждый дополняет угол ABC до 90°. Поэтому треугольники ACD и CBD подобны. Соответствие A↔C, C↔B, D↔D даёт $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$. Перемножая, получаем $CD^2=AD\cdot DB$.

б) Найди CD, AD и DB.

$CD=\frac{60}{13}$; $AD=\frac{25}{13}$; $DB=\frac{144}{13}$.

$AB=\sqrt{(5^2+12^2)}=13$. Площадь равна $5\cdot\frac{12}{2}=30$ и одновременно $AB\cdot\frac{CD}{2}$. Поэтому $CD=\frac{60}{13}$. Из подобия ACD и ABC следует $\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}$, откуда $AD=\frac{AC^2}{AB}=\frac{25}{13}$. Тогда $DB=13-\frac{25}{13}=\frac{144}{13}$. Проверка пункта а: $(\frac{60}{13})^2=(\frac{25}{13})(\frac{144}{13})$.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Соответствие вершин при подобии записано верно? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

2 Биссектриса и длина отрезка

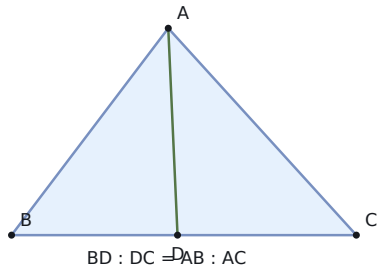


СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что площади ABD и ACD относятся как 2:3.

S(ABD):S(ACD)=2:3.

∠BAD=∠DAC по определению биссектрисы. Площади равны $AB\cdot AD\cdot\sin\angle\frac{BAD}{2}$ и $AC\cdot AD\cdot\sin\angle\frac{DAC}{2}$. Общие положительные множители сокращаются; отношение равно $\frac{AB}{AC}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

б) Найди AD.

3√6.

Из пункта a и общей высоты к BC имеем BD:DC=2:3. Так как BC=20, BD=8, DC=12. Пусть AD=x и θ=∠ADB. По теореме косинусов: $100=x^2+64-16x\cos\theta$. Угол ADC=180°−θ, поэтому $225=x^2+144+24x\cos\theta$. Умножим первое равенство на 3, второе на 2 и сложим: $750=5x^2+480$. Следовательно $x^2=54$, AD=3√6. Положительный корень выбран как длина.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Соответствие вершин при подобии записано верно? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

3 Диагонали равнобедренной трапеции

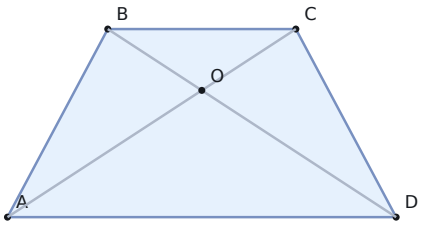


СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи AO:OC=9:4.

AO:OC=9:4.

∠AOD=∠COB вертикальные; ∠ADO=∠CBO — накрест лежащие при AD∥BC. Поэтому треугольники AOD и COB подобны, $\frac{AO}{OC}=\frac{AD}{BC}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$.

б) Найди площадь треугольника AOD.

$\frac{972}{13}$.

Опустим высоты из B и C на AD. Каждая боковая сторона имеет горизонтальную проекцию $\frac{(18-8)}{2}=5$. Высота трапеции $h=\sqrt{(13^2-5^2)}=12$. По пункту а AO:OC=9:4, значит $\frac{AO}{AC}=\frac{9}{13}$. Расстояние от точки отрезка AC до прямой AD изменяется пропорционально расстоянию от A, поэтому высота из O к AD равна $12\cdot\frac{9}{13}=\frac{108}{13}$ (это также следует из подобия прямоугольных треугольников). $S(AOD)=18\cdot\frac{(108/13)}{2}=\frac{972}{13}$.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Соответствие вершин при подобии записано верно? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

4 Две касательные

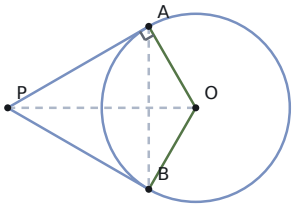


СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что OP — серединный перпендикуляр к AB.

OP⊥AB и проходит через середину AB.

OA=OB как радиусы; PA=PB как отрезки касательных из одной точки. Множество точек, равноудалённых от A и B, — серединный перпендикуляр к AB. Различные точки O и P лежат на нём, значит прямая OP совпадает с этим серединным перпендикуляром.

б) Найди площадь треугольника PAB.

$27\sqrt{3}$.

Прямоугольные OAP и OBP равны по общей гипотенузе OP и катетам OA=OB. Поэтому $\angle APO=30°$. В OAP: $OP=OA/\sin 30°=12$, $PA=\sqrt{(12^2-6^2)}=6\sqrt{3}$. PB=PA. Площадь $PAB=PA\cdot PB\cdot \sin 60°/2=(6\sqrt{3})^2\cdot \frac{(\sqrt{3}/2)}{2}=27\sqrt{3}$.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Соответствие вершин при подобии записано верно? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

5 Основания высот и скрытая окружность

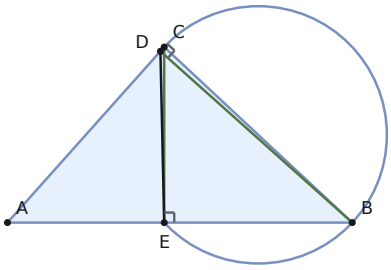


СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи, что B,C,D,E лежат на одной окружности.

Окружность имеет диаметр BC.

Из определения высот BD⊥AC и CE⊥AB. Следовательно ∠BDC=∠BEC=90°. Поэтому D и E лежат на окружности с диаметром BC; точки B и C — концы этого диаметра. Все четыре точки принадлежат одной окружности.

б) Найди DE.

$\frac{462}{65}$.

По теореме косинусов cos A=$\frac{(13^2+15^2-14^2)}{(2\cdot 13\cdot 15)}=\frac{198}{390}=\frac{33}{65}$. Из прямоугольных ABD и ACE: AD=AB cos A, AE=AC cos A. Поэтому $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$, а угол DAE равен BAC. Треугольники ADE и ABC подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними (D↔B, E↔C). Коэффициент $\frac{AD}{AB}$=cos A. Значит DE=BC cos A=14$\cdot\frac{33}{65}=\frac{462}{65}$. Проверка: это положительная длина меньше BC.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Соответствие вершин при подобии записано верно? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

6

ВТОРАЯ ЧАСТЬ · ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

Середина дуги и центр вписанной окружности

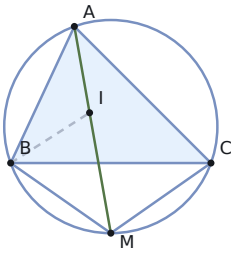


СХЕМА К ТЕМЕ

Чертёж показывает связи элементов; числовые данные каждой задачи заданы отдельно.

а) Докажи MB=MC=MI.

MB=MC=MI.

∠BAM=∠MAC, поэтому соответствующие дуги BM и MC равны, а их хорды MB и MC равны. Для общего доказательства обозначим углы треугольника α,β,γ. I лежит между A и M. Из суммы углов в ABI: $\angle BIA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}$. Следовательно $\angle BIM = 90° - \frac{\gamma}{2} = \frac{(\alpha+\beta)}{2}$. Луч BI делит ∠ABC пополам; луч BM расположен за BC относительно BA, поэтому $\angle IBM = \angle IBC + \angle CBM = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$. Здесь $\angle CBM = \angle CAM = \frac{\alpha}{2}$ как вписанные углы на хорду CM. Таким образом ∠BIM=∠IBM, и MI=MB. Вместе с MB=MC получаем утверждение.

б) Найди MI.

10.

∠A=180°−70°−50°=60°, поэтому ∠BAM=30°. По теореме синусов в треугольнике ABM, вписанном в ту же окружность, BM=2R sin∠BAM=20 sin30°=10. По пункту а MI=BM, следовательно MI=10.

Самопроверка: все использованные свойства названы? Соответствие вершин при подобии записано верно? Отброшены недопустимые длины? Получен ответ именно на вопрос задачи?

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ПРАКТИКОЙ

Опорные формулы

01. Точки, отрезки и углы

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

02. Параллельные прямые

$$a \parallel b \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$$

03. Треугольник: углы и стороны

$$A + B + C = 180^\circ$$

04. Равенство треугольников и доказательство

$$AB = DE,\ AC = DF,\ \angle A = \angle D$$

05. Равнобедренный и равносторонний треугольники

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

06. Прямоугольный треугольник и теорема Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2$$

07. Подобие и средняя линия

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = k, \quad \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

08. Медиана, биссектриса и отношения площадей

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{AG}{GD} = 2$$

09. Синус, косинус и тангенс

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

10. Площади треугольников

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{ab\sin C}{2}$$

11. Параллелограмм, прямоугольник, ромб и квадрат

$$S = ah, \quad S_{\text{ромба}} = \frac{d_1 d_2}{2}$$

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ПРАКТИКОЙ

Опорные формулы

12. Трапеция

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad S = \frac{(a+b)h}{2}$$

13. Окружность, хорды и вписанные углы

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\text{дуги } AB$$

14. Касательные и вписанная окружность

$$PA = PB, \quad OA \perp PA$$

15. Вписанные четырёхугольники

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

16. Пересекающиеся хорды, секущие и касательная

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad ; \quad PT^2 = PA \cdot PB$$

17. Теоремы синусов и косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

18. Вписанная и описанная окружности треугольника

$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}$$

19. Правильные многоугольники, длина окружности и площадь круга

$$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \quad S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

20. Координаты и векторы на плоскости

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

21. Дополнительные построения

Высота $\Rightarrow$ Пифагор

22. Как писать решение второй части

Дано $\Rightarrow$ основание $\Rightarrow$ вывод

ДЛЯ БЫСТРОЙ ПРОВЕРКИ

Краткие ответы

01. Точки, отрезки и углы

1) 12. | 2) 133°. | 3) 63°. | 4) 71°.

02. Параллельные прямые

1) 58°. | 2) 80° и 100°. | 3) Прямые параллельны. | 4) 42°.

03. Треугольник: углы и стороны

1) 75°. | 2) 75°. | 3) Нет. | 4) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

04. Равенство треугольников и доказательство

1) Да. | 2) BC=EF. | 3) Нет. | 4) AD — биссектриса.

05. Равнобедренный и равносторонний треугольники

1) 68°. | 2) 34°. | 3) 12. | 4) BD=DC.

06. Прямоугольный треугольник и теорема Пифагора

1) 10. | 2) 15. | 3) Угол против стороны 25 прямой. | 4) 9 и 9√3.

07. Подобие и средняя линия

1) 9. | 2) 4. | 3) 75. | 4) S(ADE)=S(ABC)/4.

08. Медиана, биссектриса и отношения площадей

1) 24. | 2) AG=10, GD=5. | 3) BD=6, DC=9. | 4) 24.

ДЛЯ БЫСТРОЙ ПРОВЕРКИ

Краткие ответы

09. Синус, косинус и тангенс

1) $\frac{3}{5}$. | 2) 7. | 3) $\frac{5}{13}$. | 4) 12 и 16.

10. Площади треугольников

1) 42. | 2) 9. | 3) 20. | 4) 12.

11. Параллелограмм, прямоугольник, ромб и квадрат

1) 15. | 2) 70. | 3) Сторона 17; площадь 240. | 4) Треугольники равны.

12. Трапеция

1) 11. | 2) 90. | 3) Высота 4; площадь 52. | 4) 5:2.

13. Окружность, хорды и вписанные углы

1) 56°. | 2) 53°. | 3) 24. | 4) Углы равны.

14. Касательные и вписанная окружность

1) 9. | 2) 8. | 3) 5. | 4) Из A — 7, из B — 6, из C — 8.

15. Вписанные четырёхугольники

1) 108°. | 2) Да. | 3) 72° и 108°. | 4) Окружность с диаметром BC.

16. Пересекающиеся хорды, секущие и касательная

1) 6. | 2) 10. | 3) 6. | 4) Равенство доказано.

ДЛЯ БЫСТРОЙ ПРОВЕРКИ

Краткие ответы

17. Теоремы синусов и косинусов

1) $2\sqrt{19}$. | 2) 12. | 3) $6\sqrt{2}$. | 4) $\frac{1}{7}$.

18. Вписанная и описанная окружности треугольника

1) 2. | 2) $R=\frac{13}{2}$; $r=2$. | 3) $r=4$; $R=\frac{65}{8}$. | 4) $S=pr$.

19. Правильные многоугольники, длина окружности и площадь круга

1) 6π и 9π. | 2) 6π. | 3) Сторона $5\sqrt{2}$; площадь 50. | 4) $r=3\sqrt{3}$; $S=54\sqrt{3}$.

20. Координаты и векторы на плоскости

1) 10. | 2) (3,3). | 3) 15. | 4) $u \perp v$.

21. Дополнительные построения

1) 12. | 2) 6. | 3) AE=EC. | 4) OP=6; $AB=3\sqrt{3}$.

22. Как писать решение второй части

1) Медиана не обязательно является высотой. | 2) Для вписанного: $\angle A+\angle C=180°$. | 3) Углы равны. | 4) 5 и 12.

ИТОГОВЫЕ ЗАДАЧИ · ПУНКТ Б

1. $CD=\frac{60}{13}$, $AD=\frac{25}{13}$, $DB=\frac{144}{13}$.
2. $AD=3\sqrt{6}$.
3. $S(AOD)=\frac{972}{13}$.
4. $S(PAB)=27\sqrt{3}$.
5. $DE=\frac{462}{65}$.
6. MI=10.

Доказательства пунктов а приведены в разделе полных решений.

Источник нумерации: ФИПИ, официальный проект ЕГЭ-2027.
fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory
Комплект: 2027/ma_11_2027.zip. Дата сверки: 17.10.2026.
Все учебные задания и чертежи в этой тетради авторские.