ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

Производная и её график

Рабочая тетрадь для подготовки с нуля к заданию №9 ЕГЭ-2027 по профильной математике. Плюс переход к прикладному заданию №17.

10 тем | ≈ 110 заданий | от уровня «впервые слышу» до формата ЕГЭ | ответы в конце

Ученик: _____ Начало: _____ Финиш: _____

Что такое задание №9

Часть 1, краткий ответ, 1 первичный балл. В проекте демоверсии ФИПИ 2027 года три варианта задания:

1. По графику $y = f'(x)$ найти количество точек минимума на отрезке.
2. По графику $y = f(x)$ с отмеченными точками найти, в скольких из них производная отрицательна.
3. По графику функции и касательной найти $f'(x_0)$.

До 2026 года этот тип стоял под №8. Бывшее №12 (точка максимума по формуле) в проекте 2027 года убрано, поэтому вычислительные задания в тетради даны в объёме, нужном для открытого банка и задачи №17. Утверждённую демоверсию ФИПИ обещает в первой половине ноября 2026: если номера изменятся, содержание тетради останется актуальным.

Маршрут

§1	Угловой коэффициент прямой	30 мин
§2	Касательная и $f'(x_0)$ — тип 3	40 мин
§3	Знак производной по графику f — тип 2	40 мин
§4	График производной — тип 1	60 мин
§5	Касательная, параллельная прямой	30 мин
§6	Формулы производной	40 мин
§7	Скорость и касательная по формуле	40 мин
§8	Первообразная (открытый банк)	20 мин
§9	Тренажёр ЕГЭ, 16 заданий	45 мин
§10	Мост к №17	30 мин

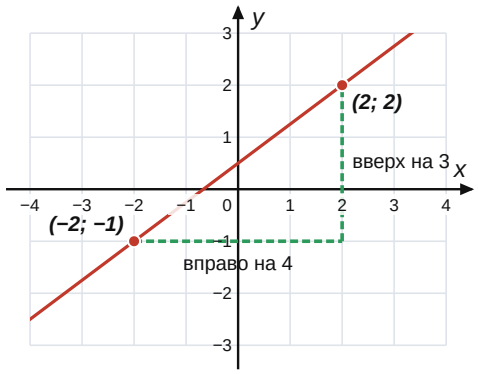
Как работать

- Каждый параграф: разбор с рисунком → вывод в зелёной рамке → задания по уровням. Сначала разбор, потом вывод: формула должна стать понятной до того, как её прочитаешь.
- Все ответы — целые числа или конечные десятичные дроби, как в бланке ЕГЭ. Получилась «некрасивая» дробь — повод перепроверить.
- Ответы и короткие пояснения — в конце тетради. Сверяйте после каждого уровня.
- В §1–§8 подписаны все деления осей. В §9 — только 0 и 1, как на экзамене: считайте клетки.

1 Угловой коэффициент прямой

Вся задача №9 держится на одном числе — наклоне прямой. Научимся находить его по двум точкам и по клеткам.

РАЗБОР **Как наклонена прямая через точки (−2; −1) и (2; 2)?**



Идём по прямой от левой точки к правой. По горизонтали сдвигаемся на 2 − (−2) = **4** клетки вправо, по вертикали — на 2 − (−1) = **3** клетки вверх.

На каждую клетку вправо прямая поднимается на 3 : 4 клетки. Это число и называют **угловым коэффициентом**:

$$k = \frac{\text{подъём}}{\text{шаг вправо}} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Если прямая при движении вправо идёт вниз, подъём отрицательный и $k < 0$.

Вывод: формула углового коэффициента

Для прямой через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- $k > 0$ — прямая «в горку»; $k < 0$ — «под горку»; $k = 0$ — горизонтальная.
- В уравнении $y = kx + b$ угловой коэффициент — число перед x. Параллельные прямые имеют одинаковое k.
- k равен тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси Ox: $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Уровень 1 · по координатам

1.1 Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки (1; 2) и (3; 8).

Ответ: _____

1.2 Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки (-2; 5) и (2; -3).

Ответ: _____

1.3 Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки (0; 0) и (4; 3).

Ответ: _____

1.4 Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки (-1; 4) и (5; 4).

Ответ: _____

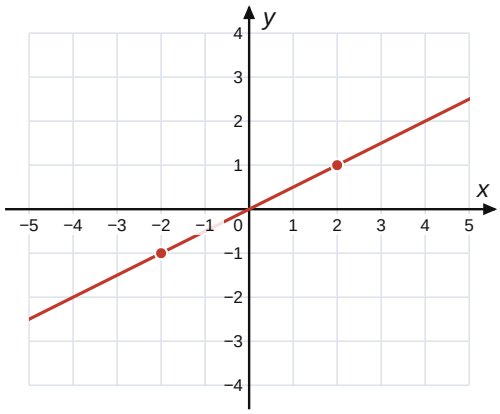
1.5 Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки (-3; -2) и (2; 0).

Ответ: _____

1.6 Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки (2; 7) и (-2; -1).

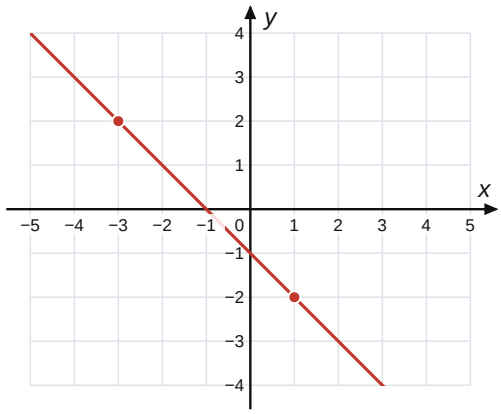
Ответ: _____

1.7 По рисунку найдите угловой коэффициент прямой. Отмеченные точки лежат в узлах сетки.



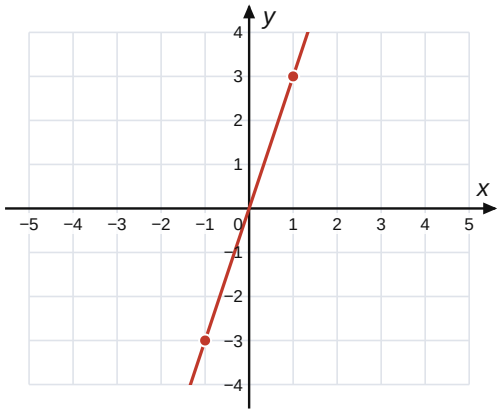
Ответ: _____

1.8 По рисунку найдите угловой коэффициент прямой. Отмеченные точки лежат в узлах сетки.



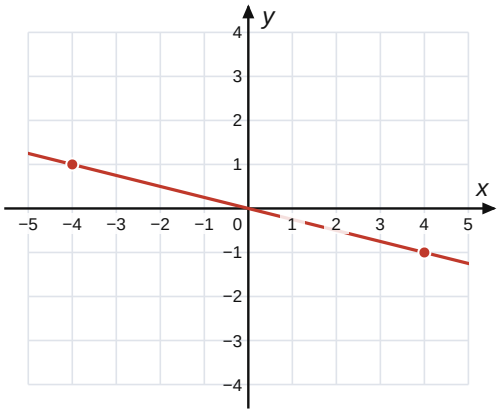
Ответ: _____

1.9 По рисунку найдите угловой коэффициент прямой. Отмеченные точки лежат в узлах сетки.



Ответ: _____

1.10 По рисунку найдите угловой коэффициент прямой. Отмеченные точки лежат в узлах сетки.



Ответ: _____

1.11 Найдите угловой коэффициент прямой $y = -2x + 7$.

Ответ: _____

1.12 Прямая параллельна прямой $y = 0{,}5x - 3$. Найдите её угловой коэффициент.

Ответ: _____

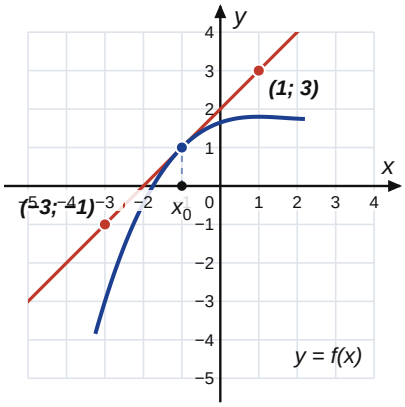
1.13 Прямая образует с осью Ox угол 45°. Найдите её угловой коэффициент.

Ответ: _____

2 Касательная и значение производной в точке

Первый тип задания №9: на рисунке график функции и касательная. Нужно найти $f'(x_0)$.

РАЗБОР Что такое производная в точке



Если сильно увеличить кусочек плавного графика около точки x_0, он станет почти прямым. Эта «почти прямая» и есть **касательная**: прямая, которая в точке касания идёт вдоль графика.

Производная $f'(x_0)$ — это угловой коэффициент касательной в точке x_0. Она показывает, с какой скоростью растёт функция в этой точке.

На рисунке касательная проходит через (−3; −1) и (1; 3): шаг вправо 4, подъём 4. Значит, $f'(x_0) = \frac{4}{4} = 1$.

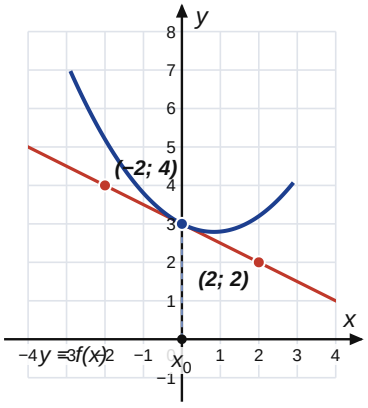
Сам график функции в вычислениях не участвует. Работаем только с прямой.

Алгоритм (тип 1)

1. Найдите на касательной две точки в узлах сетки (в ЕГЭ они отмечены).
2. Посчитайте шаг вправо и подъём (со знаком!) от левой точки к правой.
3. Разделите: $f'(x_0) = \frac{\text{подъём}}{\text{шаг вправо}}$.
4. Проверка знака: касательная идёт вверх ⇒ ответ положительный, вниз ⇒ отрицательный.

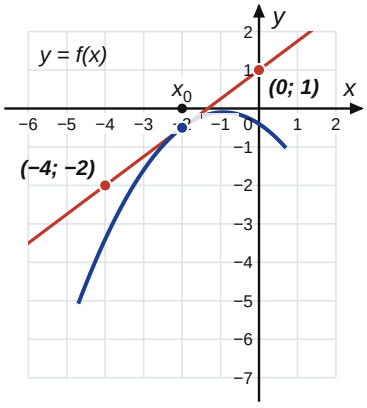
Уровень 1 · координаты подписаны

2.1 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



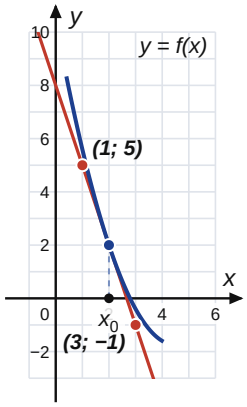
Ответ: _____

2.2 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



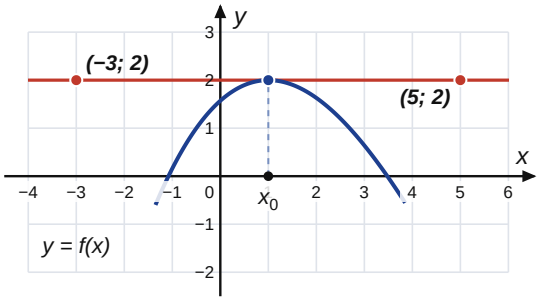
Ответ: _____

2.3 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



Ответ: _____

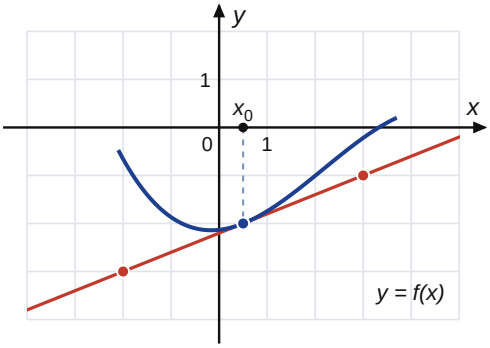
2.4 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



Ответ: _____

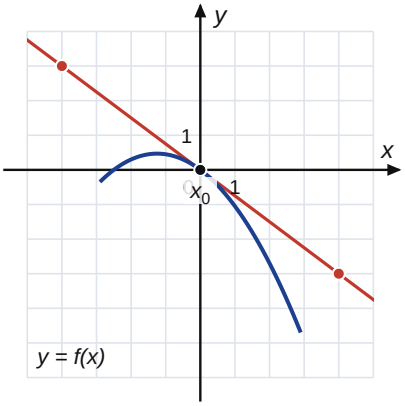
Уровень 2 · формат ЕГЭ (точки без подписей)

2.5 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.



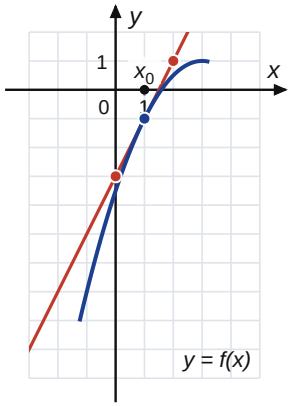
Ответ: _____

2.6 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.



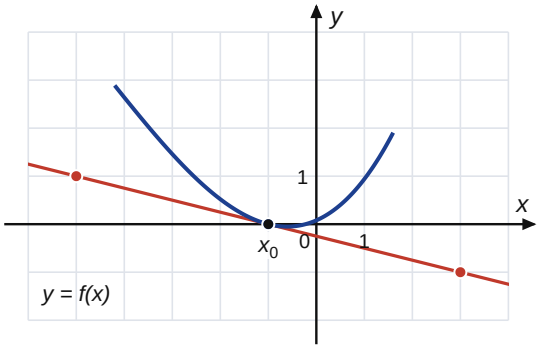
Ответ: _____

2.7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.



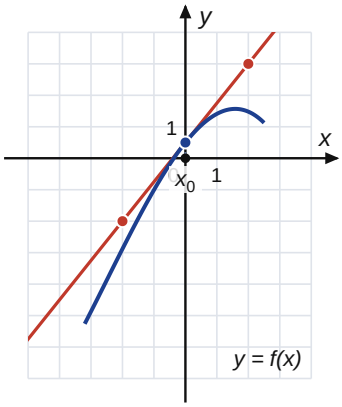
Ответ: _____

2.8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.



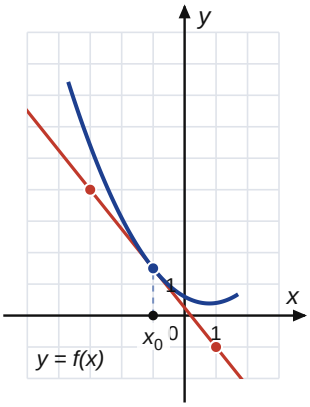
Ответ: _____

2.9 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.



Ответ: _____

2.10 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите $f'(x_0)$.

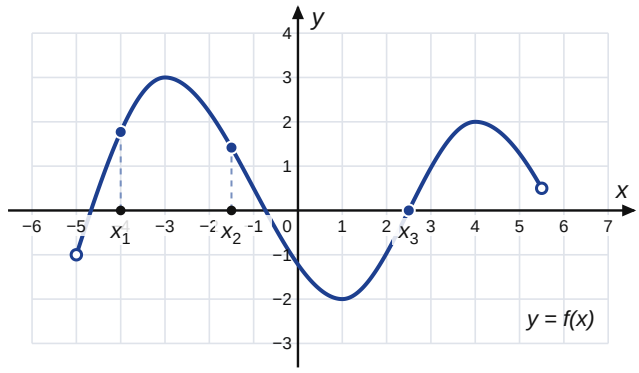


Ответ: _____

3 Знак производной по графику функции

Второй тип: на графике функции отмечены точки, нужно понять, где производная положительна, отрицательна или равна нулю.

РАЗБОР **Почему знак производной виден сразу**



Приложим линейку-касательную к графику в каждой отмеченной точке.

- В точке x_1 график идёт **вверх** — касательная «в горку», её $k > 0$, значит $f'(x_1) > 0$.
- В точке x_2 график идёт **вниз** — $f'(x_2) < 0$.
- В точке x_3 снова вверх — $f'(x_3) > 0$.
- На вершинах «горок» и дне «ям» ($x = -3, 1, 4$) касательная горизонтальна: производная равна 0.

Вывод: связь функции и производной

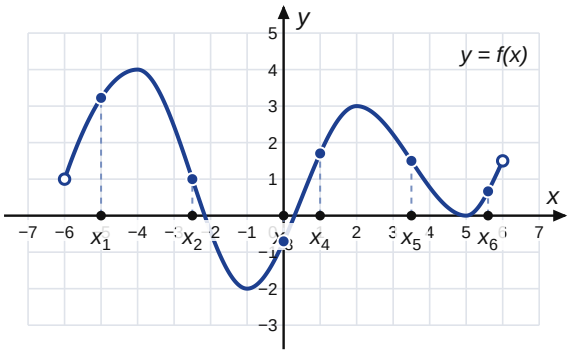
График функции	Касательная	Производная
возрастает (идёт вверх)	«в горку»	$f' > 0$
убывает (идёт вниз)	«под горку»	$f' < 0$
вершина горки — **точка максимума**	горизонтальная	$f' = 0$
дно ямы — **точка минимума**	горизонтальная	$f' = 0$

Точки максимума и минимума вместе называют **точками экстремума**. В ответ пишут абсциссу x, а не высоту y.

Чем круче идёт график вверх, тем больше производная; чем круче вниз, тем меньше (более отрицательна).

Уровень 1 · «горки» и «ямы»

3.1



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. На оси абсцисс отмечены точки $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

а) В скольких из отмеченных точек производная функции положительна?

Ответ: _____

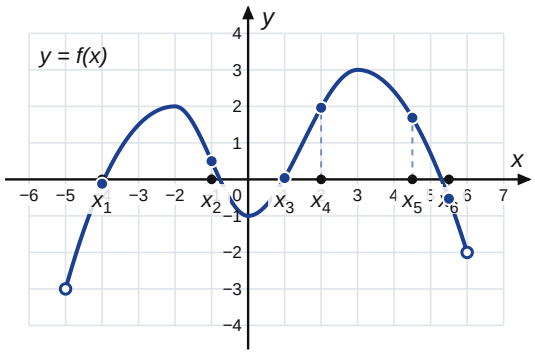
б) В скольких из отмеченных точек производная функции отрицательна?

Ответ: _____

в) Сколько на графике точек, в которых касательная горизонтальна (производная равна 0)?

Ответ: _____

3.2



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. На оси абсцисс отмечены точки $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

а) В скольких из отмеченных точек производная функции положительна?

Ответ: _____

б) Сколько у функции точек максимума?

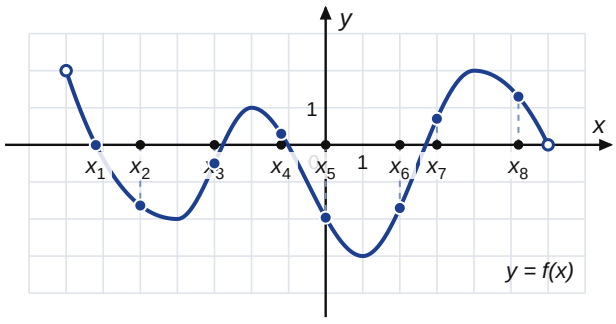
Ответ: _____

в) Найдите сумму точек экстремума функции.

Ответ: _____

Уровень 2 · формат ЕГЭ

3.3



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 6)$. На оси абсцисс отмечены точки $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$.

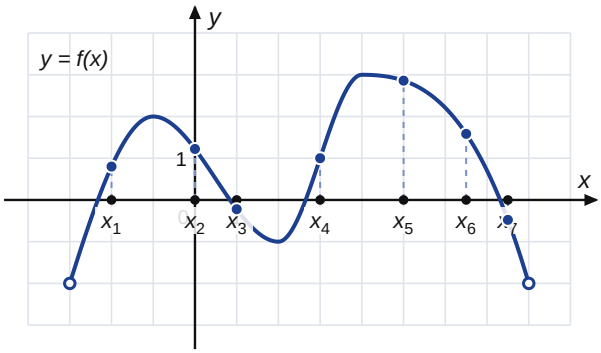
а) В скольких из отмеченных точек производная функции отрицательна?

Ответ: _____

б) В скольких из отмеченных точек производная функции положительна?

Ответ: _____

3.4



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале (-3; 8). На оси абсцисс отмечены точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

а) В скольких из отмеченных точек производная функции положительна?

Ответ: _____

б) Сколько на графике точек, в которых касательная горизонтальна (производная равна 0)?

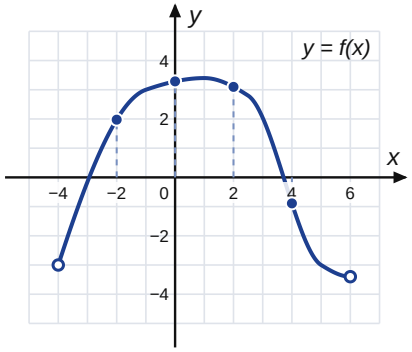
Ответ: _____

в) Найдите сумму точек экстремума функции.

Ответ: _____

Уровень 3 · сравниваем наклоны

3.5



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Рассмотрите точки -2, 0, 2, 4.

а) В какой из этих точек значение производной наибольшее?

Ответ: _____

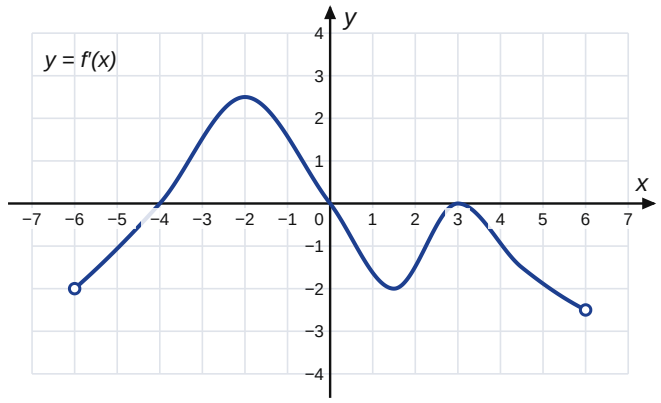
б) В какой из этих точек значение производной наименьшее?

Ответ: _____

4 Читаем график производной

Самый частый и самый коварный тип. На рисунке график f', а спрашивают про саму функцию f.

РАЗБОР **Как перевести график производной на язык функции**



Смотрим только на одно: где график f' **выше** оси Ox, где **ниже**, где её **пересекает**. Горки и ямы самой производной ничего не значат.

- На $(-6; -4)$ график ниже оси: $f' < 0$, функция f убывает.
- На $(-4; 0)$ выше оси: f возрастает. В $x = -4$ убывание сменилось ростом — это **точка минимума**.
- В $x = 0$ рост сменился убыванием — **точка максимума**.
- В $x = 3$ график касается оси, но не переходит на другую сторону: f убывала и продолжает убывать. Это **не** экстремум.

Вывод: таблица перевода

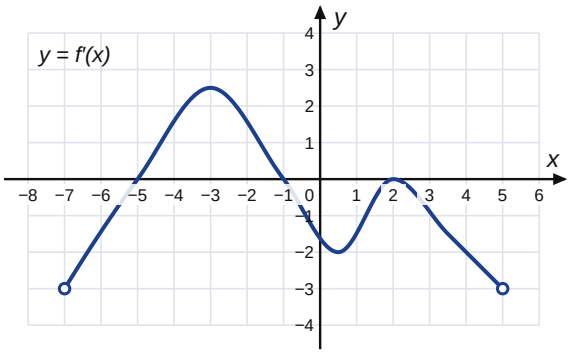
График $y = f'(x)$	Функция f
выше оси Ox	возрастает
ниже оси Ox	убывает
пересекает ось сверху вниз (+ → −)	точка максимума
пересекает ось снизу вверх (− → +)	точка минимума
касается оси без смены знака	экстремума нет

Договорённость ЕГЭ: концы промежутков возрастания и убывания включаются. Если просят «сумму целых точек промежутков», считаются и концы.

Наибольшее значение на отрезке: если $f' < 0$ на всём отрезке, функция убывает и наибольшее значение — в левом конце; если $f' > 0$ — в правом. Если есть смена знака + → −, ответ — эта точка максимума.

Уровень 1 · знаки и экстремумы

4.1



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$.

а) Найдите точку максимума функции f.

Ответ: _____

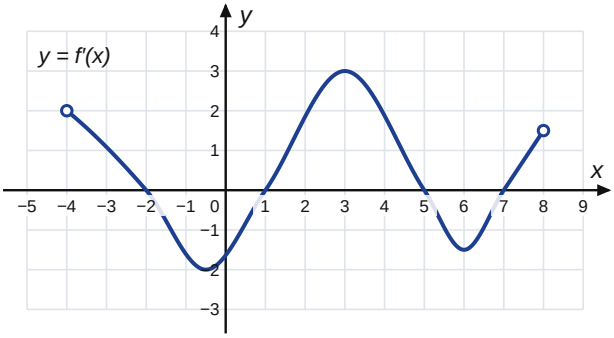
б) Найдите точку минимума функции f.

Ответ: _____

в) Найдите количество точек экстремума функции f.

Ответ: _____

4.2



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$.

а) Найдите количество точек максимума функции f.

Ответ: _____

б) Найдите количество точек минимума функции f на отрезке $[0; 8]$.

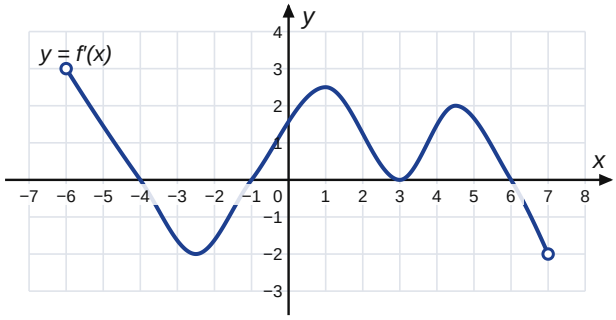
Ответ: _____

в) Найдите длину наибольшего промежутка возрастания функции f.

Ответ: _____

Уровень 2 · промежутки

4.3



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 7)$.

а) Найдите промежутки убывания функции f. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Ответ: _____

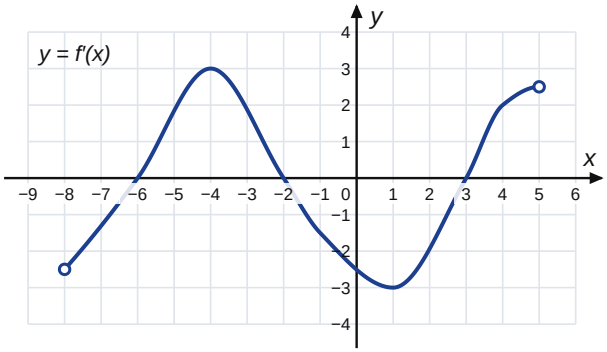
б) Найдите промежутки возрастания функции f. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Ответ: _____

в) Найдите количество точек экстремума функции f.

Ответ: _____

4.4



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 5)$.

а) Найдите длину наибольшего промежутка убывания функции f.

Ответ: _____

б) Найдите точку максимума функции f на отрезке $[-7; 0]$.

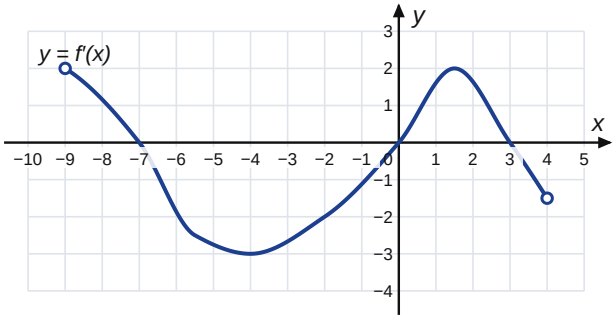
Ответ: _____

в) Найдите количество точек минимума функции f на отрезке $[-5; 5]$.

Ответ: _____

Уровень 3 · наибольшее и наименьшее значение

4.5



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$.

а) В какой точке отрезка $[-6; -1]$ функция f принимает наибольшее значение?

Ответ: _____

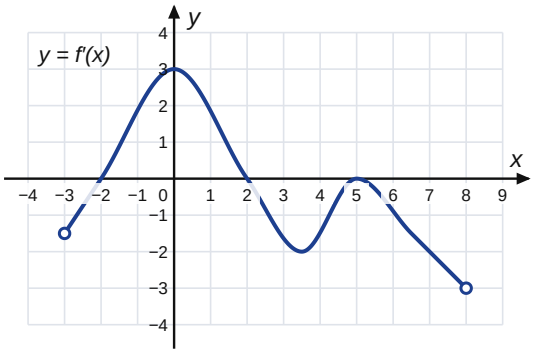
б) В какой точке отрезка $[-6; -1]$ функция f принимает наименьшее значение?

Ответ: _____

в) В какой точке отрезка $[-2; 2]$ функция f принимает наименьшее значение?

Ответ: _____

4.6



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$.

а) В какой точке отрезка $[-1; 4]$ функция f принимает наибольшее значение?

Ответ: _____

б) В какой точке отрезка $[3; 7]$ функция f принимает наименьшее значение?

Ответ: _____

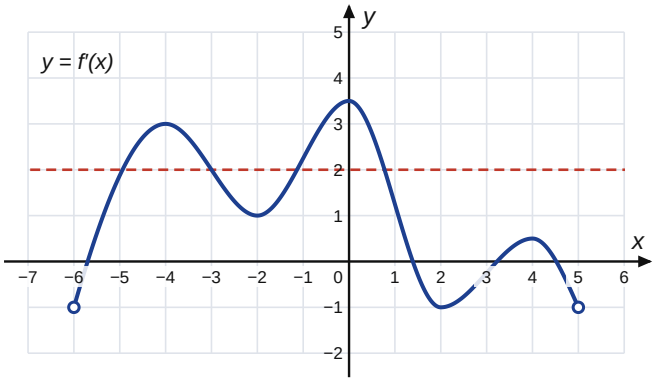
в) Найдите количество точек максимума функции f на отрезке $[-1; 7]$.

Ответ: _____

5 Касательная, параллельная прямой

Если касательная параллельна прямой $y = kx + b$, у них одинаковый наклон: $f'(x_0) = k$.

РАЗБОР **Сколько касательных параллельны прямой y = 2x − 5?**



Угловой коэффициент прямой $y = 2x - 5$ равен 2. Касательная параллельна ей там, где $f'(x) = 2$.

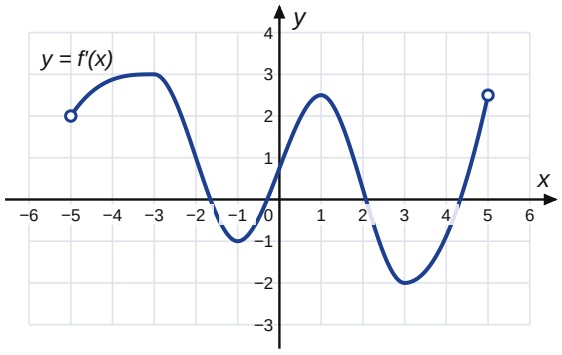
Проводим на графике производной горизонтальную прямую $y = 2$ (пунктир) и считаем точки пересечения: их **4**.

Число −5 в уравнении прямой ни на что не влияет: параллельность определяется только наклоном.

Вывод

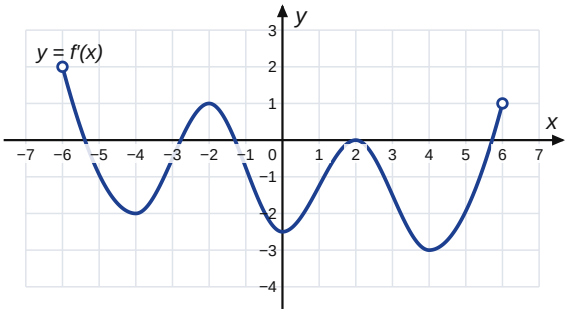
- По графику **производной**: касательная $\parallel y = kx + b \Leftrightarrow f'(x) = k$ — ищем пересечения графика с горизонталью $y = k$.
- По графику **функции**: касательная параллельна оси Ox (или прямой $y = 5$) там, где $f' = 0$, то есть на вершинах и в ямах.
- По графику производной касательная горизонтальна во **всех** нулях f', включая точки касания оси.

5.1 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале (−5; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции f параллельна прямой $y = x + 4$ или совпадает с ней.



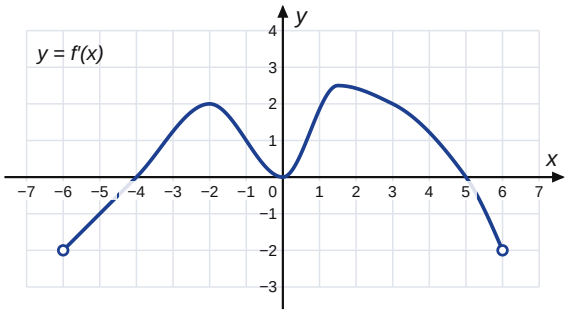
Ответ: _____

5.2 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале (−6; 6). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции f параллельна прямой $y = -x + 7$ или совпадает с ней.



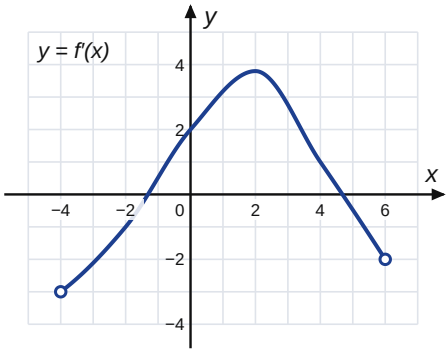
Ответ: _____

5.3 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале (-6; 6). В скольких точках касательная к графику f параллельна оси Ox?



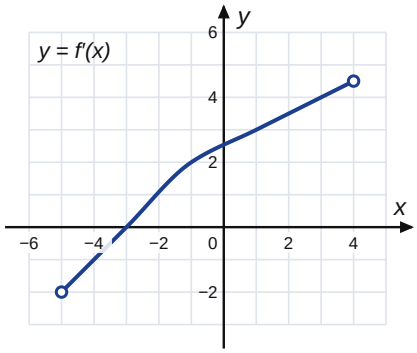
Ответ: _____

5.4 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале (-4; 6). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции f параллельна прямой $y = 3x - 1$ или совпадает с ней.



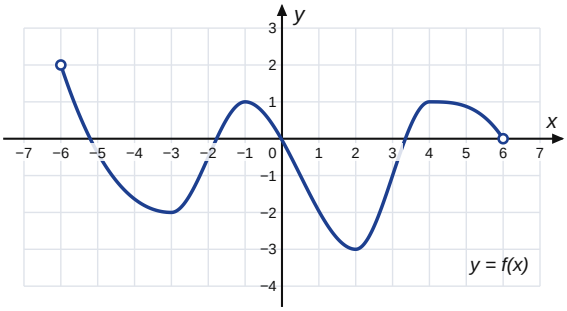
Ответ: _____

5.5 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале (-5; 4). Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику f параллельна прямой $y = 3x + 2$ или совпадает с ней.



Ответ: _____

5.6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале (-6; 6). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$.

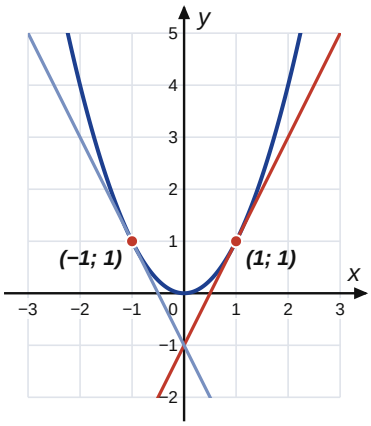


Ответ: _____

6 Считаем производную по формулам

Часть заданий №9 из открытого банка даётся без рисунка: функция задана формулой. А для задачи №17 вычислять производную нужно обязательно.

РАЗБОР **Откуда берётся $(x^2)' = 2x$**



Возьмём на параболе $y = x^2$ точку с абсциссой x и соседнюю точку $x + h$. Наклон прямой через них:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Когда соседняя точка придвигается вплотную ($h \to 0$), секущая превращается в касательную, а её наклон — в $2x$. Значит, $(x^2)' = 2x$.

Проверка по рисунку: в точке $x = 1$ касательная к параболе имеет наклон 2, в точке $x = -1$ — наклон -2.

Тот же приём для x^3 даёт $3x^2$: показатель «спускается» множителем и уменьшается на 1.

Таблица и правила

Функция	Производная
c (число)	0
$kx + b$	k
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Правила:

- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ — число выносится.
- $(f + g)' = f' + g'$ — сумма дифференцируется по слагаемым.
- Скобки сначала раскрываем, потом дифференцируем.

Пример. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 9$.

$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$, $f'(2) = 24 - 20 + 4 = 8$.

Строчка $(kx + b)' = k$ — это §1: касательная к прямой совпадает с самой прямой.

Уровень 1 · степени

6.1 Найдите значение производной функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 3$.

Ответ: _____

6.2 Найдите значение производной функции $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = -2$.

Ответ: _____

6.3 Найдите значение производной функции $f(x) = 5x - 7$ в точке $x_0 = 10$.

Ответ: _____

6.4 Найдите значение производной функции $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ в точке $x_0 = 2$.

Ответ: _____

Уровень 2 · многочлены

6.5 Найдите значение производной функции $f(x) = x^3 - 6x$ в точке $x_0 = 1$.

Ответ: _____

6.6 Найдите значение производной функции $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5$ в точке $x_0 = -1$.

Ответ: _____

6.7 Найдите значение производной функции $f(x) = x^4 - 2x^2$ в точке $x_0 = 2$.

Ответ: _____

6.8 Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ в точке $x_0 = 4$.

Ответ: _____

6.9 Найдите значение производной функции $f(x) = (x - 3)^2$ в точке $x_0 = 5$.

Ответ: _____

6.10 Найдите значение производной функции $f(x) = x(x + 4)$ в точке $x_0 = -1$.

Ответ: _____

Уровень 3 · корень, дробь, нули производной

6.11 Найдите значение производной функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$.

Ответ: _____

6.12 Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 2$.

Ответ: _____

6.13 Найдите точку, в которой производная функции $f(x) = x^2 - 6x + 5$ равна нулю.

Ответ: _____

6.14 Найдите положительную точку, в которой производная функции $f(x) = x^3 - 12x$ равна нулю.

Ответ: _____

7 Скорость и касательная по формуле

Производная — это скорость изменения. Если $x(t)$ — координата точки, то $v(t) = x'(t)$.

РАЗБОР **Материальная точка: x(t) = t² − 4t + 3**

Координата точки (в метрах) меняется по закону $x(t) = t^2 - 4t + 3$, где t — время в секундах. Найдём скорость в момент $t = 5$ с.

Скорость — это производная координаты: $v(t) = x'(t) = 2t - 4$.

$v(5) = 10 - 4 =$ **6 м/с**.

Обратный вопрос «когда скорость равна 8 м/с?» решается уравнением $2t - 4 = 8$, $t = 6$ с. Точка остановилась, когда $v = 0$: $t = 2$ с.

Уровень 1–2 · скорость

7.1 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах. Найдите её скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

Ответ: _____

7.2 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t - 1$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах. Найдите её скорость (в м/с) в момент времени $t = 6$ с.

Ответ: _____

7.3 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + 6t - 10$ (x в метрах, t в секундах). В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 14 м/с?

Ответ: _____

7.4 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 2$ (x в метрах, t в секундах). В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 2 м/с?

Ответ: _____

7.5 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^2 + 8t$ (x в метрах, t в секундах). В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 0 м/с?

Ответ: _____

7.6 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 4$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах. Найдите её скорость (в м/с) в момент времени $t = 7$ с.

Ответ: _____

Касательная по формуле

Касательная к графику $y = f(x)$ в точке x_0 имеет угловой коэффициент $f'(x_0)$. Отсюда два шага:

1. «Касательная параллельна прямой $y = kx + b$» ⇒ решаем уравнение $f'(x) = k$.
2. «Прямая является касательной» ⇒ в точке касания совпадают и наклоны, и значения: $f'(x_0) = k$ и $f(x_0) = kx_0 + b$.

Уровень 2–3 · касательная

7.7 Прямая $y = 3x + 4$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____

7.8 Прямая $y = -x + 6$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 3x - 2$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____

7.9 Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3 - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Ответ: _____

7.10 Прямая $y = 2x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^2 + 4x + c$. Найдите c.

Ответ: _____

7.11 Прямая $y = 7x - 5$ является касательной к графику функции $y = x^2 + 6x + c$. Найдите c.

Ответ: _____

8 Первообразная — производная наоборот

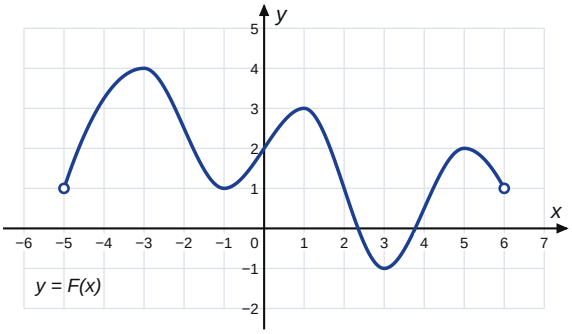
В проекте демоверсии 2027 первообразной нет, но в открытом банке заданий она встречается. Раздел короткий: 20 минут работы.

Главное за одну минуту

$F(x)$ — **первообразная** функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Значит, всё из §3–§4 работает с заменой букв: F играет роль функции, f — роль производной.

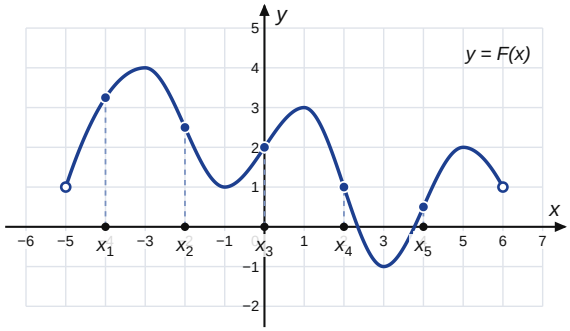
- На графике F вершины и ямы — это точки, где $f(x) = 0$.
- Где F возрастает, там $f(x) > 0$.
- Площадь под графиком $y = f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$ равна $F(b) - F(a)$.

8.1 На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 6]$.



Ответ: _____

8.2 По тому же графику первообразной (с отмеченными точками) определите, в скольких из точек x_1, ..., x_5 функция $f(x)$ положительна.

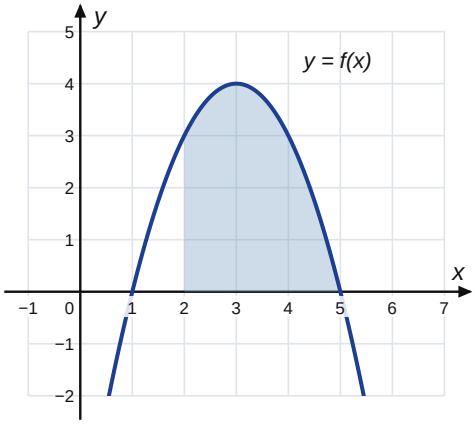


Ответ: _____

8.3 Функция $F(x) = x^2 + 4x - 3$ — первообразная функции $f(x)$. Найдите $F(3) - F(1)$.

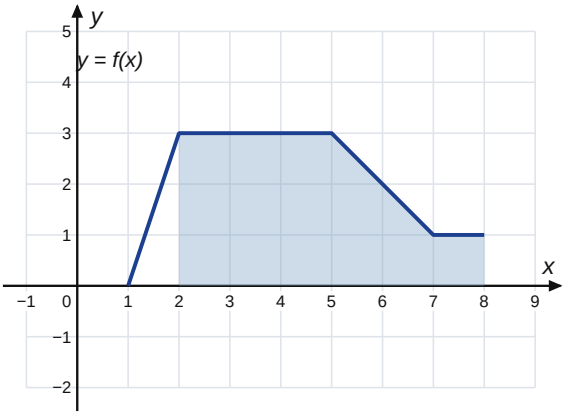
Ответ: _____

8.4 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ — одна из первообразных $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры (от $x = 2$ до $x = 5$).



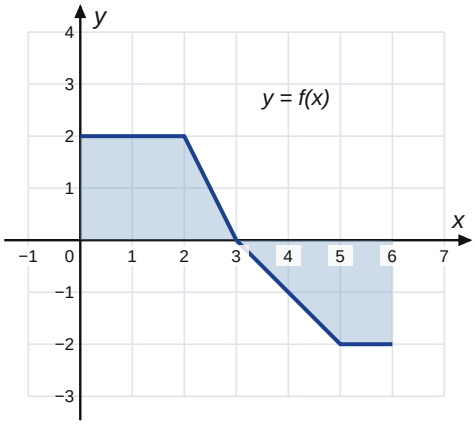
Ответ: _____

8.5 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (ломаная). Пусть $F(x)$ — одна из первообразных $f(x)$. Найдите $F(8) - F(2)$, то есть площадь закрашенной фигуры.



Ответ: _____

8.6 ★ На рисунке график функции $y = f(x)$. F — первообразная f. Найдите $F(6) - F(0)$. Подсказка: площадь части под осью Ox берётся со знаком минус.

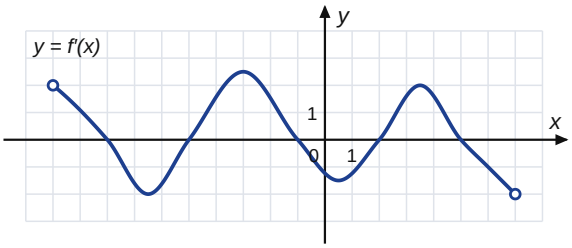


Ответ: _____

9 Тренажёр в формате ЕГЭ: 16 заданий №9

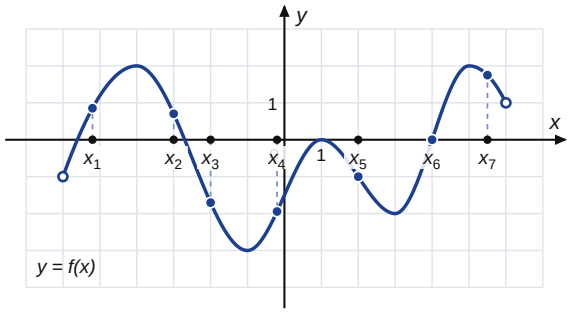
Все рисунки как на экзамене: подписаны только 0 и 1. Засеките время: на одно задание в среднем 2–3 минуты.

9.1 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 7)$. Найдите количество точек минимума функции f на отрезке $[-2; 6]$.



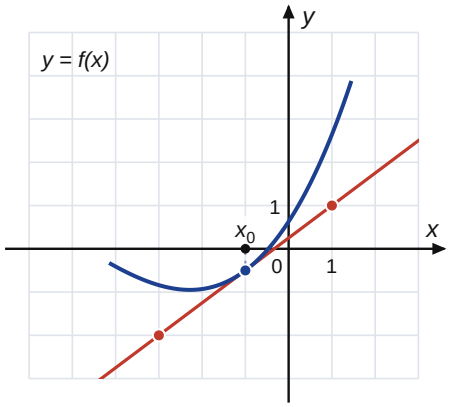
Ответ: _____

9.2 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. На оси абсцисс отмечено 7 точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



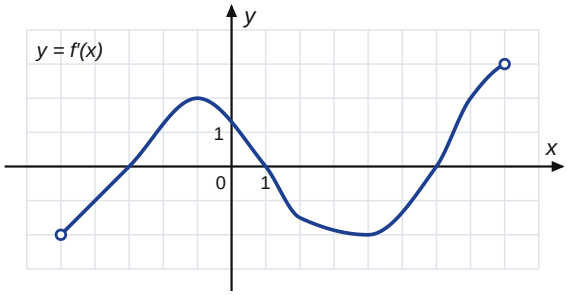
Ответ: _____

9.3 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



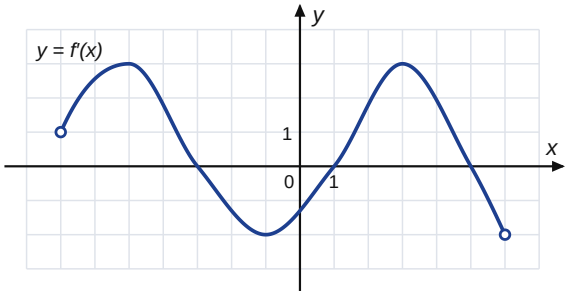
Ответ: _____

9.4 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 8)$. Найдите количество точек максимума функции f.



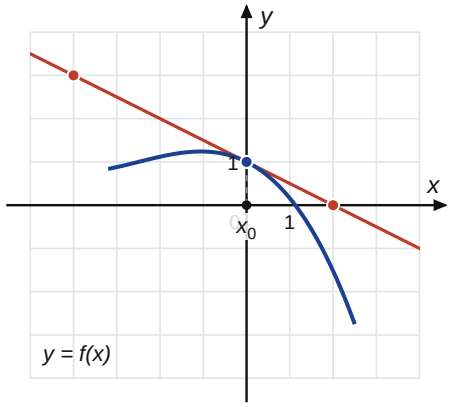
Ответ: _____

9.5 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 6)$. Найдите точку минимума функции f на отрезке $[-4; 2]$.



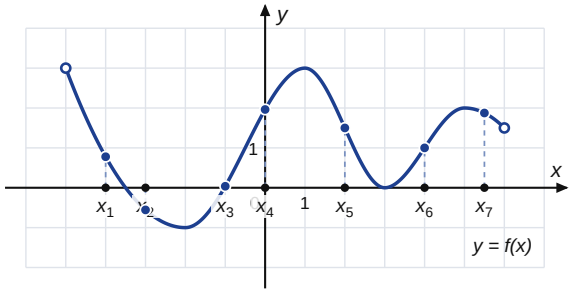
Ответ: _____

9.6 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



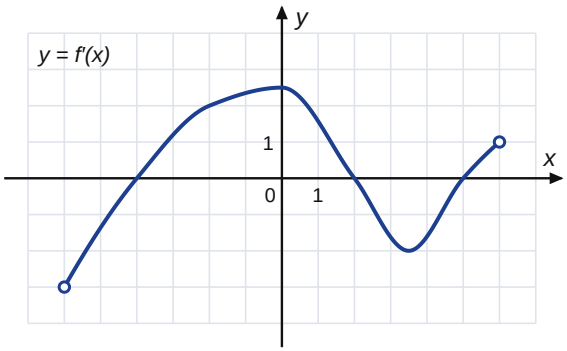
Ответ: _____

9.7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. На оси абсцисс отмечено 7 точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



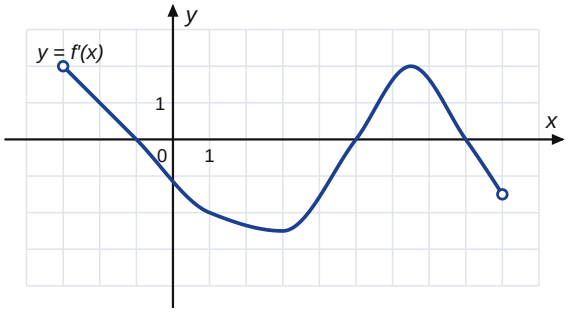
Ответ: _____

9.8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите длину наибольшего промежутка возрастания функции f.



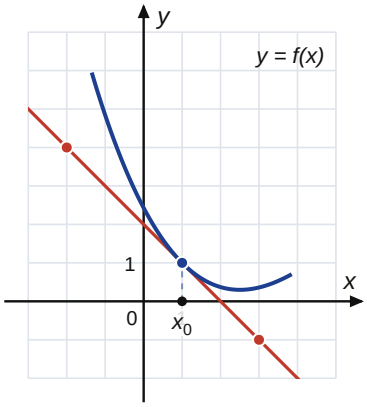
Ответ: _____

9.9 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 9)$. В какой точке отрезка $[-2; 4]$ функция f принимает наибольшее значение?



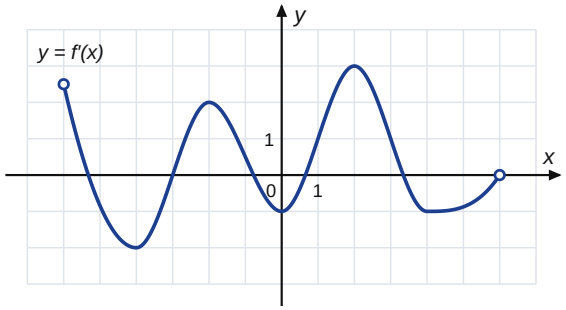
Ответ: _____

9.10 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



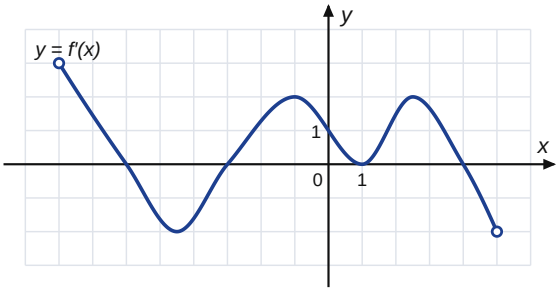
Ответ: _____

9.11 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции f параллельна прямой $y = x - 4$ или совпадает с ней.



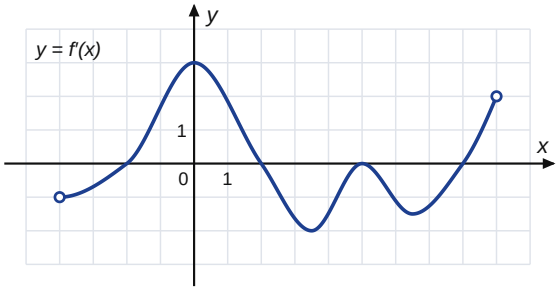
Ответ: _____

9.12 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 5)$. Найдите промежутки возрастания функции f. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



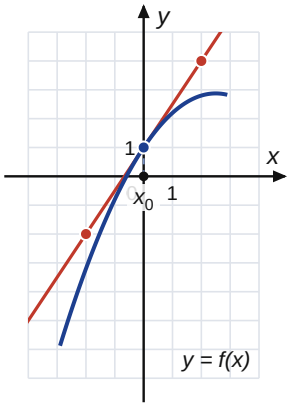
Ответ: _____

9.13 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. Найдите количество точек экстремума функции f на отрезке $[-3; 7]$.



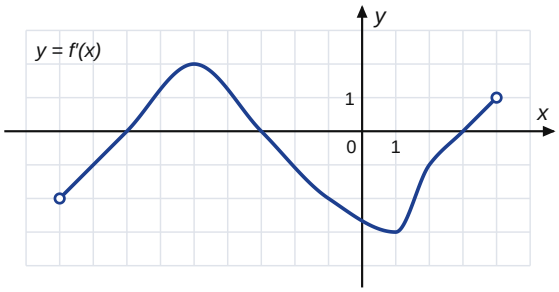
Ответ: _____

9.14 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



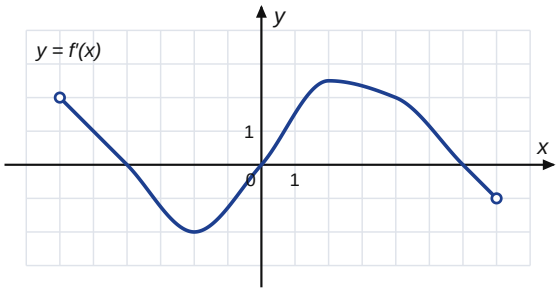
Ответ: _____

9.15 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ функция f принимает наименьшее значение?



Ответ: _____

9.16 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 7)$. Найдите точку максимума функции f на отрезке $[-1; 7]$.



Ответ: _____

10 Мост к заданию №17: наибольшее значение

В проекте ЕГЭ-2027 задание №17 — прикладная задача с развёрнутым ответом, например про наибольшую мощность. Её ядро — тот же алгоритм: производная = 0, проверка знака.

РАЗБОР **Наибольшая мощность**

Источник с ЭДС $\varepsilon = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом отдаёт во внешнюю цепь мощность $P(I) = \varepsilon I - I^2 r = 12I - 2I^2$. При какой силе тока мощность наибольшая и чему она равна?

1. $P'(I) = 12 - 4I$.
2. $P' = 0$ при $I = 3$.
3. Знак: при $I < 3$ производная положительна (мощность растёт), при $I > 3$ отрицательна (падает). Смена $+ \to -$ $\Rightarrow$ максимум.
4. $P(3) = 36 - 18 =$ **18 Вт**.

Шаг 3 обязателен в развёрнутом решении: без него не доказано, что найден именно максимум.

10.1 Мяч брошен вверх, его высота меняется по закону $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ (h в метрах, t в секундах). Найдите наибольшую высоту мяча.

Ответ: _____

10.2 Периметр прямоугольника равен 40. Площадь при стороне x равна $S(x) = x(20 - x)$. Найдите наибольшую площадь.

Ответ: _____

10.3 Из квадратного листа 12 × 12 по углам вырезают квадраты со стороной x и сгибают открытую коробку объёмом $V(x) = x(12 - 2x)^2$. Найдите наибольший объём коробки.

Ответ: _____

10.4 Прибыль предприятия при выпуске q тысяч изделий равна $P(q) = -q^3 + 12q^2 + 5$ (млн руб.), $0 < q < 12$. При каком q прибыль наибольшая?

Ответ: _____

10.5 Источник с ЭДС 20 В и внутренним сопротивлением 4 Ом отдаёт во внешнюю цепь мощность $P(I) = 20I - 4I^2$. Найдите наибольшую мощность (в ваттах).

Ответ: _____

10.6 ★ Функция $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$. Найдите точку максимума функции.

Ответ: _____

Ответы

Сверяйтесь после каждого уровня. Пояснение подскажет, где искать ошибку.

§1. Угловой коэффициент прямой

№	Ответ	Как получено
1.1	**3**	k = 6 : 2
1.2	**−2**	k = −8 : 4
1.3	**0,75**	k = 3 : 4
1.4	**0**	k = 0 : 6
1.5	**0,4**	k = 2 : 5
1.6	**2**	k = −8 : −4
1.7	**0,5**	подъём 2 на шаг 4
1.8	**−1**	подъём −4 на шаг 4
1.9	**3**	подъём 6 на шаг 2
1.10	**−0,25**	подъём −2 на шаг 8
1.11	**−2**	число перед x
1.12	**0,5**	параллельные ⇒ одинаковые k
1.13	**1**	tg 45° = 1

§2. Касательная и значение производной в точке

№	Ответ	Как получено
2.1	**−0,5**	k = −2/4
2.2	**0,75**	k = 3/4
2.3	**−3**	k = −6/2
2.4	**0**	k = 0/8
2.5	**0,4**	точки (−2; −3), (3; −1)
2.6	**−0,75**	точки (−4; 3), (4; −3)
2.7	**2**	точки (0; −3), (2; 1)
2.8	**−0,25**	точки (−5; 1), (3; −1)
2.9	**1,25**	точки (−2; −2), (2; 3)
2.10	**−1,25**	точки (−3; 4), (1; −1)

§3. Знак производной по графику функции

№	Ответ	Как получено
3.1а	**4**	f′>0: x1, x3, x4, x6
3.1б	**2**	f′<0: x2, x5
3.1в	**4**	экстремумы: −4, −1, 2, 5
3.2а	**3**	f′>0: x1, x3, x4
3.2б	**2**	максимумы: −2, 3
3.2в	**1**	−2 + 0 + 3
3.3а	**5**	f′<0: x1, x2, x4, x5, x8
3.3б	**3**	f′>0: x3, x6, x7
3.4а	**2**	f′>0: x1, x4
3.4б	**3**	экстремумы: −1, 2, 4
3.4в	**5**	−1 + 2 + 4
3.5а	**−2**	самый крутой подъём
3.5б	**4**	самый крутой спуск

§4. Читаем график производной

№	Ответ	Как получено
4.1а	**−1**	смена знака + → −
4.1б	**−5**	смена знака − → +
4.1в	**2**	точки экстремума: −5, −1
4.2а	**2**	точки максимума: −2, 5
4.2б	**2**	точки минимума: 1, 7
4.2в	**4**	промежутки: [−4; −2], [1; 5], [7; 8]
4.3а	**−4**	−4 − 3 − 2 − 1 + 6
4.3б	**11**	−5 − 4 − 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
4.3в	**3**	точки экстремума: −4, −1, 6
4.4а	**5**	промежутки: [−8; −6], [−2; 3]
4.4б	**−2**	смена знака + → −
4.4в	**1**	точки минимума: 3
4.5а	**−6**	знак f′ на отрезке; кандидаты −6, −1
4.5б	**−1**	знак f′ на отрезке; кандидаты −6, −1
4.5в	**0**	знак f′ на отрезке; кандидаты −2, 2, 0
4.6а	**2**	знак f′ на отрезке; кандидаты −1, 4, 2
4.6б	**7**	знак f′ на отрезке; кандидаты 3, 7, 5
4.6в	**1**	точки максимума: 2

§5. Касательная, параллельная прямой

№	Ответ	Как получено
5.1	**4**	f′(x) = 1: 4 пересечения
5.2	**6**	f′(x) = −1: 6 пересечения
5.3	**3**	нули f′: −4, 0, 5
5.4	**2**	f′(x) = 3: 2 пересечения
5.5	**1**	f′(x)=3 при x=1
5.6	**4**	вершины и ямы: −3, −1, 2, 4

§6. Считаем производную по формулам

№	Ответ	Как получено
6.1	**6**	$f' = 2\cdot x$
6.2	**12**	$f' = 3\cdot x^2$
6.3	**5**	$f' = 5$
6.4	**8**	$f' = 6\cdot x - 4$
6.5	**−3**	$f' = 3\cdot x^2 - 6$
6.6	**4**	$f' = 6\cdot x^2 + 2\cdot x$
6.7	**24**	$f' = 4\cdot x^3 - 4\cdot x$
6.8	**3**	$f' = x^2 - 4\cdot x + 3$
6.9	**4**	$f' = 2\cdot x - 6$
6.10	**2**	$f' = 2\cdot x + 4$
6.11	**0,25**	$f' = 1/(2\cdot\sqrt{(x)})$
6.12	**−0,25**	$f' = -1/x^2$
6.13	**3**	$f' = 2x - 6 = 0$
6.14	**2**	$3x^2 - 12 = 0$

§7. Скорость и касательная по формуле

№	Ответ	Как получено
7.1	**11**	$v = 3\cdot t^2 - 6\cdot t + 2$
7.2	**17**	$v = t^2 - 4\cdot t + 5$
7.3	**4**	$v = 2\cdot t + 6 = 14$
7.4	**7**	$v = t^2 - 6\cdot t - 5 = 2$
7.5	**4**	$v = 8 - 2\cdot t = 0$
7.6	**10**	$v = t + 3$
7.7	**4**	$f' = 2\cdot x - 5 = 3$
7.8	**−2**	$f' = 2\cdot x + 3 = -1$
7.9	**10**	$3x^2 - 2$ при $x = 2$
7.10	**2**	$x_0 = -1$, затем $f(x_0) = kx_0 + b$
7.11	**−4,75**	$x_0 = 0{,}5$, затем $f(x_0) = kx_0 + b$

§8. Первообразная — производная наоборот

№	Ответ	Как получено
8.1	**4**	экстремумы F: −1, 1, 3, 5
8.2	**3**	F возрастает в −4, 0, 4
8.3	**16**	18 − 2
8.4	**9**	F(5) − F(2) = 9
8.5	**14**	трапеции и прямоугольники: 9 + 4 + 1
8.6	**1**	над осью 4 + 1 = 5, под осью 2 + 2 = 4; 5 − 4

§9. Тренажёр в формате ЕГЭ: 16 заданий №9

№	Ответ	Как получено
9.1	**1**	точки минимума: 2
9.2	**4**	x1+, x2−, x3−, x4+, x5−, x6+, x7−
9.3	**0,75**	точки (−3; −2) и (1; 1)
9.4	**1**	точки максимума: 1
9.5	**1**	смена знака − → +
9.6	**−0,5**	точки (−4; 3) и (2; 0)
9.7	**3**	x1−, x2−, x3+, x4+, x5−, x6+, x7−
9.8	**6**	промежутки: [−4; 2], [5; 6]
9.9	**−1**	знак f′ на отрезке; кандидаты −2, 4, −1
9.10	**−1**	точки (−2; 4) и (3; −1)
9.11	**5**	f′(x) = 1: 5 пересечения
9.12	**−9**	−7 − 6 − 3 − 2 − 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4
9.13	**2**	точки экстремума: −2, 2
9.14	**1,5**	точки (−2; −2) и (2; 4)
9.15	**−7**	знак f′ на отрезке; кандидаты −8, −4, −7
9.16	**6**	смена знака + → −

§10. Мост к заданию №17: наибольшее значение

№	Ответ	Как получено
10.1	**21**	крит. точка 2
10.2	**100**	крит. точка 10
10.3	**128**	крит. точка 2
10.4	**8**	крит. точка 8
10.5	**25**	крит. точка 2,5
10.6	**−1**	крит. точка −1