Числа и их свойства
От первых шагов до №20

12 тем • 60 упражнений • 3 итоговые задачи

Для ученика, который ещё не изучал теорию чисел. Нужны действия с целыми числами, понимание дроби и простых уравнений. Эти навыки повторяются в первых разделах.

Как заниматься

На каждую тему: 10–15 минут на теорию и пример, 30–45 минут на задачи, 10–15 минут на проверку. Если база даётся трудно, раздели тему на два занятия. Итоговые задачи решай по 35–45 минут каждую.

Сначала решай самостоятельно. В HTML открывай подсказку только после собственной попытки; решение — после записи полного рассуждения. В PDF ответы и решения собраны после всех заданий.

Успех в №20 — это объяснение

«Да» требует проверенного примера. «Нет» требует доказательства. Максимум и минимум требуют ограничения и примера, достигающего границы. Даже верный ответ без обоснования не заменяет решение.

Основа курса

Нумерация сверена с официальным проектом ФИПИ для ЕГЭ-2027, доступным 17.10.2026: задание 20 посвящено целым числам и их свойствам. Все упражнения здесь авторские; это учебная тетрадь, а не официальный вариант. Курс даёт основные инструменты, но не гарантирует решение любой новой задачи.

Ученик: _____
Начало: _____ Завершение: _____

Маршрут подготовки

01. Целые числа и язык условия

02. Делимость и разложение на множители

03. Чётность и первые доказательства

04. Остатки без сложных обозначений

05. НОД, НОК и сокращение дробей

06. Цифры и запись числа

07. Целочисленные уравнения и монеты

08. Разложение уравнения на множители

09. Оценка и пример: максимум и минимум

10. Подсчёт чисел и связанные количества

11. Инварианты и принцип Дирихле

12. Полнота перебора и достижимость сумм

После тем 1–4: объясни невозможность через чётность или остаток. После 5–8: обоснуй полный перебор решений. После 9–12: докажи границу и построй пример.

Лист самопроверки

☐ Указал область значений переменных.
☐ Использовал все ограничения условия.
☐ Обосновал, что других случаев нет.
☐ Проверил пример по каждому требованию.
☐ Для экстремума доказал границу и достижение.
☐ Написал ответ на каждый пункт.

01. Целые числа и язык условия

Разберись

Натуральные числа в этой тетради: 1, 2, 3, …; целые: …, −2, −1, 0, 1, 2, … . «Различные» означает попарно не равные. При переводе текста в формулы сразу указывай, какие значения разрешены. Существование доказывают примером; невозможность — рассуждением для всех случаев.

Пример с решением

Можно ли выбрать три различных целых числа больше −3 с суммой 0? Да: −2, −1, 3. Проверяем отдельно: все целые, различны, больше −3, сумма 0.

Самостоятельная работа

1.1. Выпиши все целые числа x, для которых $-3 < x \le 2$.

1.2. Найди наименьшую сумму трёх различных натуральных чисел.

1.3. Могут ли четыре различных целых числа больше −2 иметь сумму 2?

1.4. Могут ли четыре различных натуральных числа иметь сумму 9?

1.5. Найди наибольшее число среди четырёх различных натуральных чисел с суммой 20.

02. Делимость и разложение на множители

Разберись

a делится на d, если a=dq при целом q. Число 0 делится на любое ненулевое целое d. На 2 делятся чётные числа; на 3 и 9 — числа с соответствующей суммой цифр; на 5 — оканчивающиеся на 0 или 5. Простое число имеет ровно два положительных делителя. Если число делится на взаимно простые a и b, оно делится на ab.

Пример с решением

Найти натуральные n, при которых n+2 делит 18. Положительные делители 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18. Так как n+2 ≥ 3, получаем n=1, 4, 7, 16.

Самостоятельная работа

2.1. Выпиши положительные делители 24.

2.2. Разложи 180 на простые множители.

2.3. Найди все цифры a, при которых число 4a2 делится на 3.

2.4. Найди все натуральные n, при которых n+3 делит 20.

2.5. Число делится на 6 и на 10. Обязательно ли оно делится на 60? На 30?

03. Чётность и первые доказательства

Разберись

Чётное число записывают 2k, нечётное — 2k+1. Сумма двух нечётных чётна; произведение нечётных нечётно. В произведении соседних целых есть чётный множитель. Несколько проверенных примеров не доказывают утверждение для всех n.

Пример с решением

Докажем, что n^2+n чётно: $n^2+n=n(n+1)$. Из двух соседних чисел одно чётное, поэтому произведение делится на 2.

Самостоятельная работа

3.1. Может ли сумма пяти нечётных чисел равняться 100?

3.2. Докажи, что произведение трёх последовательных целых делится на 6.

3.3. Докажи, что квадрат нечётного числа даёт остаток 1 при делении на 8.

3.4. Может ли сумма квадратов двух нечётных чисел быть квадратом целого?

3.5. Из чисел от 1 до 9 каждое берут со знаком + или −. Может ли сумма быть 0?

04. Остатки без сложных обозначений

Разберись

При делении целого n на положительное m: $n=mq+r$, где $0 \le r < m$. Одинаковые остатки обозначают $n \equiv r \pmod m$. Остатки можно складывать и умножать, затем снова брать остаток. Для отрицательных чисел правило то же: $-1=5\cdot(-1)+4$.

Пример с решением

Найти остаток 7^{20} при делении на 5. Остаток 7 равен 2. Степени 2 дают цикл 2,4,3,1 длины 4. Поскольку 20 кратно 4, ответ 1.

Самостоятельная работа

4.1. Найди частное q и остаток r: $47=6q+r$, $0 \le r < 6$.

4.2. Какой остаток даёт -17 при делении на 5?

4.3. n даёт остаток 3 при делении на 7. Найди остаток $2n+5$.

4.4. Найди остаток 3^{2027} при делении на 7.

4.5. Докажи, что n^2 не может давать остаток 2 при делении на 3.

05. НОД, НОК и сокращение дробей

Разберись

НОД — наибольший общий положительный делитель; НОК — наименьшее общее положительное кратное. Алгоритм Евклида: НОД(a,b)=НОД(b,r), где r — остаток. Дробь несократима, если НОД числителя и знаменателя равен 1. Для положительных a,b: НОД(a,b)·НОК(a,b)=ab.

Пример с решением

НОД(n,n+1)=1: общий делитель делит их разность 1. Аналогично НОД(n,n+6)=НОД(n,6), поэтому возможны только делители 6.

Самостоятельная работа

5.1. Найди НОД(48,18) и НОК(48,18).

5.2. На какое наибольшее число можно сократить дробь 84/126?

5.3. При каких натуральных n дробь n/(n+2) сократима?

5.4. Найди все возможные значения НОД(n,n+12) для натуральных n.

5.5. Для каких натуральных n дробь (2n+1)/(3n+2) сократима?

06. Цифры и запись числа

Разберись

Двузначное число с цифрами a,b равно 10a+b, где 1 ≤ a ≤ 9, 0 ≤ b ≤ 9. Трёхзначное — 100a+10b+c. Число и сумма его цифр имеют одинаковый остаток по модулю 9. После перестановки цифр первая цифра нового числа тоже не должна быть нулём, если оно должно остаться двузначным.

Пример с решением

Число на 27 больше числа с переставленными цифрами. Тогда (10a+b)−(10b+a)=9(a−b)=27, то есть a−b=3. При ненулевой b получаются 41,52,63,74,85,96.

Самостоятельная работа

6.1. Запиши через a и b разность числа ab и числа ba.

6.2. Сумма цифр двузначного числа 10. Оно на 36 больше двузначного числа с переставленными цифрами. Найди число.

6.3. Может ли разность двузначного числа и числа с переставленными цифрами быть 25?

6.4. Найди все трёхзначные числа вида a5a, делящиеся на 9.

6.5. Двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр. Найди все такие числа.

07. Целочисленные уравнения и монеты

Разберись

В уравнении ax+by=S переменные обозначают количества, поэтому обычно целые и неотрицательные. Сначала используй остатки, затем границы. Необходимое условие: НОД(a,b) делит S. Оно само по себе не гарантирует решения при ограниченном запасе монет.

Пример с решением

2x+5y=17, x,y≥0. По модулю 2 число y нечётно. Из 5y≤17 получаем y≤3, значит y=1 или 3. Решения: (6,1), (1,3).

Самостоятельная работа

7.1. Найди все неотрицательные целые решения 2x+3y=12.

7.2. Можно ли монетами по 4 и 6 рублей набрать 15 рублей?

7.3. Есть не более четырёх монет по 3 рубля и не более трёх по 5 рублей. Найди все способы набрать 19 рублей.

7.4. Найди все целые решения 3x+5y=1.

7.5. Найди наименьшее число монет по 3 и 7 рублей для суммы 100 рублей; запас не ограничен.

08. Разложение уравнения на множители

Разберись

Если произведение целых равно фиксированному числу, возможных пар множителей конечное число. Преобразование должно быть равносильным: нельзя терять нулевые значения при делении. Если нужны все целые решения, учитывай отрицательные делители; если натуральные — проверь границы после обратной замены.

Пример с решением

$xy=x+y+3 \Leftrightarrow xy-x-y+1=4 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=4$. Для натуральных x,y оба множителя неотрицательны; произведение положительно. Пары $(1,4),(2,2),(4,1)$ дают $(2,5),(3,3),(5,2)$.

Самостоятельная работа

8.1. Найди натуральные пары (x,y), для которых $xy=12$.

8.2. Найди натуральные решения $xy=x+y$.

8.3. Найди натуральные решения $xy=2x+2y$.

8.4. Найди натуральные $x>y$, для которых $x^2-y^2=45$.

8.5. Найди все целые решения $xy=x+y+5$.

09. Оценка и пример: максимум и минимум

Разберись

Чтобы доказать максимум M, нужны две части: больше M быть не может; значение M достигается. Для различных натуральных $a_1<\ldots<a_k$ имеем $a_i \geq i$, поэтому сумма $\geq k(k+1)/2$. Для различных положительных кратных d минимальная сумма равна $d\cdot k(k+1)/2$.

Пример с решением

Сколько различных натуральных чисел можно взять с суммой 20? Шесть требуют хотя бы 21, поэтому не больше пяти. Пять возможны: 1,2,3,4,10. Ответ 5.

Самостоятельная работа

9.1. Найди наименьшую сумму пяти различных положительных чётных чисел.

9.2. Сколько различных натуральных чисел может быть в наборе с суммой 30? Найди максимум.

9.3. Наибольшее из пяти различных натуральных чисел с суммой 40: каково его максимально возможное значение?

9.4. Каково наименьшее возможное наибольшее число в наборе пяти различных натуральных с суммой 40?

9.5. Найди максимум количества различных положительных кратных 3 с суммой 90.

10. Подсчёт чисел и связанные количества

Разберись

В последовательности a,a+d,…,b с включёнными концами количество чисел равно (b−a)/d+1. Сначала найди первый и последний допустимые элементы. Если карточки одного цвета несут различные числа, их количество не превосходит количества доступных значений. Одно число на двух цветах может быть разрешено условием.

Пример с решением

Сколько чётных целых больше −10 и не больше 2b? При целом b≥1 это −8,−6,…,2b. Количество (2b+8)/2+1=b+5. Поэтому r различных красных карточек с такими числами требуют r≤b+5.

Самостоятельная работа

10.1. Сколько целых чисел удовлетворяют $-4 < x \le 7$?

10.2. Сколько кратных 5 строго больше −20 и не больше 15?

10.3. Синих карточек b, красных r. На красных различные чётные числа больше −10, максимум равен 2b. Докажи r≤b+5.

10.4. На синих b карточках различные кратные 5 больше −10. Максимум равен числу красных r>0. Докажи, что r кратно 5 и b≤r/5+2.

10.5. Оба условия предыдущих двух задач выполнены одновременно; карточки обоих цветов есть. Найди наибольшее r.

11. Инварианты и принцип Дирихле

Разберись

Инвариант — величина или свойство, которое не меняется при разрешённом действии. Для задачи «можно ли получить» сначала ищи сохраняющуюся чётность, остаток или сумму. Принцип Дирихле: если объектов больше, чем ящиков, хотя бы в одном ящике не меньше двух объектов. Ящиками могут быть остатки или специально подобранные пары.

Пример с решением

Среди шести целых найдутся два с разностью, кратной 5: возможны только пять остатков 0,1,2,3,4. Два числа имеют один остаток, поэтому их разность делится на 5.

Самостоятельная работа

11.1. Число 0 разрешено увеличивать или уменьшать на 4. Можно ли получить 14?

11.2. На доске числа 1,...,10. За ход два числа заменяют их суммой. Какое число останется в конце?

11.3. Докажи: среди восьми целых найдутся два, разность которых кратна 7.

11.4. Из чисел 1,...,10 выбрали шесть. Докажи, что два выбранных дают сумму 11.

11.5. Из чисел 1,...,20 выбрали 11. Докажи, что одно выбранное число делится на другое.

12. Полнота перебора и достижимость сумм

Разберись

Перебор становится доказательством, когда объяснено, почему других случаев нет. Удобный порядок: границы → остатки → короткий список → проверка. Для монет полезно строить перекрывающиеся интервалы достижимых сумм. Если можно получить все суммы от 0 до S и добавить монету c≤S+1, получатся все суммы от 0 до S+c.

Пример с решением

Есть монеты 1,2,2,5. Монета 1 даёт суммы 0…1. Добавление 2 расширяет их до 0…3; второй 2 — до 0…5; монета 5 — до 0…10. Каждый новый интервал соприкасается с предыдущим или перекрывает его.

Самостоятельная работа

12.1. Найди все натуральные n, для которых $n^2<30$ и n даёт остаток 1 при делении на 3.

12.2. Можно ли монетами 1,2,5 получить любую целую сумму от 0 до 8? Каждую монету используют не более одного раза.

12.3. Докажи, что монетами 1,2,2,5 можно получить все целые суммы от 0 до 10.

12.4. Есть три монеты по 2 и две по 5. Сколько монет по 1 минимально нужно добавить, чтобы получить любую сумму от 0 до 17?

12.5. Есть четыре монеты по 3 и две по 7. Сколько монет по 1 минимально нужно добавить, чтобы получить любую сумму от 0 до 28?

Итоговая задача 1
Монеты с ограниченным запасом

Есть 8 монет по 2 рубля и 9 монет по 5 рублей. Каждую монету можно использовать не более одного раза.

а) Можно ли набрать 59 рублей?

б) Можно ли набрать 60 рублей?

в) Сколько монет по 1 рублю минимально нужно добавить, чтобы набрать любую целую сумму от 1 до 63 включительно?

Итоговая задача 2
Два цвета карточек

Есть b синих и r красных карточек, b,r>0. На синих — различные целые числа, кратные 5; на красных — различные чётные целые числа. Все числа строго больше −30. Максимум на синих равен r, максимум на красных равен 2b. Одно число может встретиться на разных цветах.

а) Может ли карточек быть ровно 6?

б) Может ли красных карточек быть на 16 больше, чем синих?

в) Какое наибольшее общее количество карточек возможно?

Итоговая задача 3
Различные числа с фиксированной суммой

Выбрано несколько различных натуральных чисел. Их сумма равна 100.

а) Может ли чисел быть ровно 10?

б) Может ли чисел быть ровно 14?

в) Каково наибольшее возможное количество чисел?

Как проверять и исправлять работу

Для каждой задачи отметь один результат: решил и обосновал; решил с подсказкой; понял после разбора; пока не понял. Через 2–3 дня вернись к двум последним категориям и реши без просмотра.

Типичные ошибки

• Найден только пример. Он доказывает возможность, но не невозможность и не оптимальность.

• Перебраны несколько чисел без границ. Сначала докажи, что решение лежит в конечном диапазоне.

• В задаче о карточках пропущен ноль или включена строгая граница. Выпиши начало и конец списка.

• Найдена оценка, но нет конструкции. Значение может оказаться недостижимым.

• Нарушены ограничения: число целое, но не натуральное; монет больше, чем есть; в наборе повторяются числа.

Журнал ошибок

Номер задачи → где ошибся → какое правило помогает → дата повторного решения

Решения · тема 1
Целые числа и язык условия

1.1. Ответ: −2, −1, 0, 1, 2.

Начинаем с −2 и заканчиваем 2; между соседними целыми разность 1.

1.2. Ответ: 6.

После упорядочивания a ≥ 1, b ≥ 2, c ≥ 3. Значит, сумма ≥ 6; числа 1, 2, 3 дают 6.

1.3. Ответ: Да.

Подходят −1, 0, 1, 2. Их сумма 2, все ограничения выполнены.

1.4. Ответ: Нет.

Упорядоченные числа не меньше 1, 2, 3, 4; сумма не меньше 10 > 9.

1.5. Ответ: 14.

Три остальных дают не менее 1+2+3=6, поэтому максимум ≤14. Набор 1, 2, 3, 14 достигает границы.

Решения · тема 2
Делимость и разложение на множители

2.1. Ответ: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Пары: 1·24, 2·12, 3·8, 4·6. Других пар нет: меньший множитель не превосходит $\sqrt{24} < 5$.

2.2. Ответ: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

$180 = 2 \cdot 90 = 2^2 \cdot 45 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

2.3. Ответ: a = 0, 3, 6, 9.

6+a кратно 3 тогда и только тогда, когда a кратно 3. Среди цифр это 0,3,6,9.

2.4. Ответ: n = 1, 2, 7, 17.

Делители 20, не меньшие 4: 4,5,10,20. Вычитаем 3 и проверяем полученные значения.

2.5. Ответ: На 60 — нет; на 30 — да.

Контрпример для 60: число 30. Делимость на 6 и 10 обеспечивает множители 2,3,5, поэтому число кратно 30.

Решения · тема 3
Чётность и первые доказательства

3.1. Ответ: Нет.

Сумма нечётного количества нечётных чисел нечётна, а 100 чётно.

3.2. Ответ: Всегда делится.

Среди трёх соседних есть чётное и число, кратное 3. Поэтому произведение кратно $2 \cdot 3 = 6$.

3.3. Ответ: Остаток 1.

$(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$. Число $k(k+1)$ чётно, значит, первое слагаемое кратно 8.

3.4. Ответ: Нет.

Квадрат нечётного даёт остаток 1 по модулю 4, сумма — 2. Квадрат целого имеет только остаток 0 или 1.

3.5. Ответ: Нет.

Исходная сумма 45 нечётна. Замена $+k$ на $-k$ уменьшает её на $2k$ и сохраняет нечётность. Ноль чётен.

Решения · тема 4
Остатки без сложных обозначений

4.1. Ответ: q=7, r=5.

47=42+5=6·7+5; остаток меньше 6.

4.2. Ответ: 3.

$-17=5\cdot(-4)+3$, причём $0 \le 3<5$.

4.3. Ответ: 4.

2n+5=14k+11=7(2k+1)+4.

4.4. Ответ: 5.

Остатки: 3,2,6,4,5,1. 2027=6·337+5, поэтому остаток равен остатку 3^5, то есть 5.

4.5. Ответ: Невозможно.

Для n с остатками 0,1,2 квадрат имеет остатки 0,1,1 соответственно. Других случаев нет.

Решения · тема 5
НОД, НОК и сокращение дробей

5.1. Ответ: 6 и 144.

48=2·18+12, 18=12+6, 12=2·6, значит НОД=6. НОК=48·18:6=144.

5.2. Ответ: 42.

84=2·42, 126=3·42. После деления получаем 2/3, которая несократима.

5.3. Ответ: При чётных n.

НОД(n,n+2)=НОД(n,2). Он больше 1 ровно тогда, когда n чётно.

5.4. Ответ: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

НОД(n,n+12)=НОД(n,12), поэтому иных значений нет. Каждое значение d из списка достигается при n=d.

5.5. Ответ: Ни для каких.

Общий делитель делит 3(2n+1)−2(3n+2)=−1. Значит, НОД равен 1 всегда.

Решения · тема 6
Цифры и запись числа

6.1. Ответ: 9(a−b).

(10a+b)−(10b+a)=9a−9b=9(a−b).

6.2. Ответ: 73.

Складываем равенства: 2a=14, a=7, b=3. Проверка: 73−37=36.

6.3. Ответ: Нет.

Разность равна 9(a−b), а 25 на 9 не делится.

6.4. Ответ: Только 252.

При 1≤a≤9 сумма 2a+5 лежит от 7 до 23. Кратные 9 здесь 9 и 18. Уравнение 2a+5=9 даёт a=2; =18 даёт нецелое a. Значит, только 252.

6.5. Ответ: 12, 24, 36, 48.

Получаем 6a=3b, то есть b=2a. Ограничение b≤9 даёт a=1,2,3,4. Все четыре числа подходят.

Решения · тема 7
Целочисленные уравнения и монеты

7.1. Ответ: (6,0), (3,2), (0,4).

Из чётности y=0,2,4. Подстановка даёт x=6,3,0. Граница y≤4 исключает другие варианты.

7.2. Ответ: Нет.

4x+6y чётно при любых целых x,y, а 15 нечётно.

7.3. Ответ: 3 монеты по 3 и 2 монеты по 5.

2y≡1 (mod 3), поэтому y≡2. Среди 0,1,2,3 подходит только y=2. Тогда x=3, и ограничение x≤4 выполнено.

7.4. Ответ: x=2+5k, y=−1−3k, k целое.

По модулю 5: 3x≡1, значит x≡2. Пишем x=2+5k и получаем y=−1−3k. Подстановка проверяет все k.

7.5. Ответ: 16 монет.

3x+7y=100 даёт y≡1 (mod 3), 0≤y≤14. Значит y=1,4,7,10,13. Число монет (100−4y)/3 убывает с y. При y=13 имеем x=3, всего 16.

Решения · тема 8
Разложение уравнения на множители

8.1. Ответ: (1,12), (2,6), (3,4), (4,3), (6,2), (12,1).

x должен быть положительным делителем 12, а y=12/x. Перебрали все шесть делителей.

8.2. Ответ: (2,2).

(x−1)(y−1)=1. Оба множителя неотрицательны, поэтому каждый равен 1.

8.3. Ответ: (3,6), (4,4), (6,3).

(x−2)(y−2)=4. Положительные пары 1·4,2·2,4·1 дают указанные решения. Отрицательные пары −1·−4,−2·−2,−4·−1 дают хотя бы одну неположительную переменную.

8.4. Ответ: (23,22), (9,6), (7,2).

Положительные пары с первым меньшим второго: (1,45),(3,15),(5,9). В каждой оба числа нечётны, поэтому полусумма и полуразность целые. Они дают все решения.

8.5. Ответ: (2,7), (3,4), (4,3), (7,2), (0,−5), (−1,−2), (−2,−1), (−5,0).

(x−1)(y−1)=6. Пары: (1,6),(2,3),(3,2),(6,1) и (−1,−6),(−2,−3),(−3,−2),(−6,−1). Прибавляем к каждой координате 1.

Решения · тема 9
Оценка и пример: максимум и минимум

9.1. Ответ: 30.

Каждое упорядоченное число не меньше соответствующего из 2,4,6,8,10. Сумма ≥30; этот набор даёт равенство.

9.2. Ответ: 7.

1+…+8=36>30, значит чисел ≤7. Набор 1,2,3,4,5,6,9 имеет сумму 30 и содержит 7 различных чисел.

9.3. Ответ: 30.

Остальные четыре имеют сумму не меньше 10, поэтому наибольшее ≤30. Набор 1,2,3,4,30 достигает 30.

9.4. Ответ: 10.

Сумма ≤5M−10, поэтому 40≤5M−10 и M≥10. Набор 6,7,8,9,10 имеет сумму 40.

9.5. Ответ: 7.

После деления получаем различные натуральные с суммой 30, их не больше 7. Пример: 3,6,9,12,15,18,27; сумма 90.

Решения · тема 10
Подсчёт чисел и связанные количества

10.1. Ответ: 11.

Числа $-3,-2,\ldots,7$; количество $7-(-3)+1=11$.

10.2. Ответ: 7.

$-15,-10,-5,0,5,10,15$ — семь чисел.

10.3. Ответ: $r\le b+5$.

Допустимы $-8,-6,\ldots,2b$, всего $b+5$ чисел. Различные числа на r карточках выбираются из этого набора.

10.4. Ответ: r кратно 5; $b\le r/5+2$.

Максимальное синее число само кратно 5, поэтому r кратно 5. Список $-5,0,5,\ldots,r$ содержит $r/5+2$ чисел.

10.5. Ответ: 5.

$r\le r/5+7$, откуда $r\le 8{,}75$. Поскольку r положительно и кратно 5, $r\le 5$. Пример: $b=1$, синее число 5; $r=5$, красные $-6,-4,-2,0,2$. Условия выполнены.

Решения · тема 11
Инварианты и принцип Дирихле

11.1. Ответ: Нет.

После любого числа действий значение кратно 4, а 14 не кратно 4.

11.2. Ответ: 55.

Каждый ход сохраняет сумму всех записанных чисел. В конце одно число равно исходной сумме 10·11/2=55.

11.3. Ответ: Всегда найдутся.

Остатков семь, чисел восемь. Два имеют одинаковый остаток; их разность кратна 7.

11.4. Ответ: Такая пара есть.

Пары (1,10),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6). При выборе шести чисел хотя бы одна из пяти пар выбрана целиком.

11.5. Ответ: Такая пара есть.

Каждое число единственным образом равно $2^k u$, где u нечётно. Возможны 10 нечётных u от 1 до 19. У двух из 11 чисел u совпадает. Число с меньшей степенью 2 делит число с большей.

Решения · тема 12
Полнота перебора и достижимость сумм

12.1. Ответ: 1 и 4.

Из $n^2<30$ следует $n\le5$. Среди 1,2,3,4,5 остаток 1 дают 1 и 4; оба удовлетворяют неравенству.

12.2. Ответ: Нет.

Без монеты 5 сумма не больше 3, а с ней не меньше 5. Поэтому 4 недостижима.

12.3. Ответ: Можно.

После 1 доступны 0…1; после 2 — 0…3; после ещё 2 — 0…5. Добавление 5 даёт 5…10, объединение равно 0…10.

12.4. Ответ: 1.

Без рублёвой монеты нельзя получить 1, значит нужна хотя бы одна. С ней и тремя двойками доступны 0…7. Добавляя пятёрки, получаем последовательно 0…12 и 0…17.

12.5. Ответ: 2.

Меньше двух единиц недостаточно для суммы 2. С двумя доступны 0…2. Каждая тройка расширяет интервал без разрыва: до 5,8,11,14. Две семёрки расширяют до 21 и 28.

Разбор итоговой задачи 1
Монеты с ограниченным запасом

а) Можно ли набрать 59 рублей?

Ответ: Да.

Все монеты дают 61. Уберём одну двойку: 7·2+9·5=59. Запас соблюдён.

б) Можно ли набрать 60 рублей?

Ответ: Нет.

Общая сумма 61, поэтому пришлось бы отложить монеты на 1 рубль. Из монет по 2 и 5 такая сумма невозможна.

в) Сколько монет по 1 рублю минимально нужно добавить, чтобы набрать любую целую сумму от 1 до 63 включительно?

Ответ: 2.

При добавлении одной монеты общая сумма лишь 62, поэтому требуется минимум две. С двумя единицами доступны 0…2. Восемь двоек расширяют интервал до 0…18, девять пятёрок последовательно до 0…63: каждая новая пятёрка не создаёт разрыва. Значит двух достаточно.

Проверь своё оформление: пример проверен? Невозможность доказана для всех случаев? В пункте «в» есть и оценка, и достижение?

Разбор итоговой задачи 2
Два цвета карточек

а) Может ли карточек быть ровно 6?

Ответ: Да.

Синяя карточка: 5. Красные: $-6,-4,-2,0,2$. Всего 6; синий максимум $5=r$, красный $2=2b$; числа внутри каждого цвета различны и больше -30.

б) Может ли красных карточек быть на 16 больше, чем синих?

Ответ: Нет.

Доступных красных значений $(2b+28)/2+1=b+15$, поэтому $r\le b+15$. Равенство $r=b+16$ невозможно.

в) Какое наибольшее общее количество карточек возможно?

Ответ: 36.

Синие значения $-25,-20,\ldots,r$; значит r кратно 5 и $b\le r/5+6$. Красных не больше $b+15$. Поэтому $r\le r/5+21$, то есть $r\le 26{,}25$. С учётом кратности 5 получаем $r\le 25$ и $b\le 11$, всего ≤ 36. Достижение: $b=11$, синие $-25,-20,\ldots,25$; $r=25$, красные $-26,-24,\ldots,22$. Максимумы $25=r$ и $22=2b$; все ограничения выполнены.

Проверь своё оформление: пример проверен? Невозможность доказана для всех случаев? В пункте «в» есть и оценка, и достижение?

Разбор итоговой задачи 3
Различные числа с фиксированной суммой

а) Может ли чисел быть ровно 10?

Ответ: Да.

Подходит набор 1,2,3,4,5,6,7,8,9,55. Первые девять дают 45, всего 100; все числа различны.

б) Может ли чисел быть ровно 14?

Ответ: Нет.

После упорядочивания i-е число не меньше i. Сумма $\geq 14 \cdot 15/2 = 105 > 100$.

в) Каково наибольшее возможное количество чисел?

Ответ: 13.

Для 14 и большего количества минимальная сумма ≥ 105, значит максимум ≤ 13. Возьмём 1,2,…,12 и 22. Сумма первых двенадцати 78, общая 100; 22 отличается от остальных. Получили 13 чисел.

Проверь своё оформление: пример проверен? Невозможность доказана для всех случаев? В пункте «в» есть и оценка, и достижение?

Краткие ответы

1. 1) −2, −1, 0, 1, 2. | 2) 6. | 3) Да. | 4) Нет. | 5) 14.

2. 1) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. | 2) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. | 3) a = 0, 3, 6, 9. | 4) n = 1, 2, 7, 17. | 5) На 60 — нет; на 30 — да.

3. 1) Нет. | 2) Всегда делится. | 3) Остаток 1. | 4) Нет. | 5) Нет.

4. 1) q=7, r=5. | 2) 3. | 3) 4. | 4) 5. | 5) Невозможно.

5. 1) 6 и 144. | 2) 42. | 3) При чётных n. | 4) 1, 2, 3, 4, 6, 12. | 5) Ни для каких.

6. 1) 9(a−b). | 2) 73. | 3) Нет. | 4) Только 252. | 5) 12, 24, 36, 48.

7. 1) (6,0), (3,2), (0,4). | 2) Нет. | 3) 3 монеты по 3 и 2 монеты по 5. | 4) x=2+5k, y=−1−3k, k целое. | 5) 16 монет.

8. 1) (1,12), (2,6), (3,4), (4,3), (6,2), (12,1). | 2) (2,2). | 3) (3,6), (4,4), (6,3). | 4) (23,22), (9,6), (7,2). | 5) (2,7), (3,4), (4,3), (7,2), (0,−5), (−1,−2), (−2,−1), (−5,0).

9. 1) 30. | 2) 7. | 3) 30. | 4) 10. | 5) 7.

10. 1) 11. | 2) 7. | 3) $r \le b+5$. | 4) r кратно 5; $b \le r/5+2$. | 5) 5.

11. 1) Нет. | 2) 55. | 3) Всегда найдутся. | 4) Такая пара есть. | 5) Такая пара есть.

12. 1) 1 и 4. | 2) Нет. | 3) Можно. | 4) 1. | 5) 2.

Итоговые: 1) а — да; б — нет; в — 2. 2) а — да; б — нет; в — 36. 3) а — да; б — нет; в — 13.

Источник структуры: ФИПИ, проекты ЕГЭ-2027
fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory
Комплект: doc.fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory/2027/ma_11_2027.zip
Авторские учебные задания. Дата сверки: 17.10.2026.