Прикладные модели

Рабочая тетрадь · материал по проекту КИМ

Этот материал создавался по проекту ЕГЭ-2027.
В утверждённом варианте 2027 года отдельного задания
с такой нумерацией нет. Включение темы в ЕГЭ-2028
не утверждено.

Задачи можно использовать для дополнительной тренировки:
перевод условия в математическую модель, поиск ограничений,
наибольшего и наименьшего значения, полное обоснование.

Следующие 22 страницы сохранены в исходном виде. Их
нумерация заданий, баллы и сведения о формате экзамена
относятся к отменённому проекту, а не к КИМ 2027 года.

ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

ЕГЭ-2027 · ПРОФИЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА · ЧАСТЬ 2

Задание 17

Математические модели реальных ситуаций

Рабочая тетрадь для подготовки с нуля: от подстановки в формулу до полного решения на 2 балла

7 блоков | 79 задач | 12 задач в формате ЕГЭ | ответы и решения в конце

Ученик _____ Начало _____ Финиш _____

Что это за задание

- **Новое в 2027 году.** Стоит в части 2 (развёрнутое решение), повышенный уровень, **2 первичных балла**, на него отводят около 20 минут. Всего в КИМ теперь 20 заданий и 33 первичных балла.
- **Что проверяет** (спецификация ФИПИ): умение перевести жизненную ситуацию на язык математики — составить выражение, уравнение, неравенство или систему, исследовать модель средствами алгебры и начал анализа и истолковать результат. Сюжеты могут быть взяты из других предметов.
- **В проекте демоверсии** обе предложенные задачи физические (по разборам — решается одна на выбор): наибольшая тепловая мощность в цепи генератора (закон Ома и закон Джоуля–Ленца) и период волн, при котором амплитуда вынужденной качки корабля наибольшая.

Что из этого следует для подготовки

- **Факт:** опубликован только проект. Утверждённые документы ФИПИ обещает в ноябре 2026 года, формулировки ещё могут поменяться.
- **Интерпретация (уверенность высокая):** основу задания составят задачи на наибольшее и наименьшее значение. Именно туда ведут оба демо-сюжета, и в них нужна производная.
- **Интерпретация (уверенность средняя):** спецификация шире оптимизации, поэтому в тетради есть и модели-уравнения, неравенства и системы (блоки 2 и 6.6).
- **Допущение:** законы физики могут быть только названы, без формулы. Поэтому базовые формулы собраны на этой странице, их нужно знать.

ПРАВИЛО

Пять шагов любого решения

1. **Обозначь.** Что меняется (это переменная) и в каких единицах; какую величину спрашивают.
2. **Составь модель.** Вырази искомую величину через *одну* переменную.
3. **Ограничь.** При каких значениях переменной ситуация имеет смысл (сопротивление положительно, длина меньше листа, время до падения…).
4. **Исследуй.** Реши уравнение или неравенство либо найди наибольшее/наименьшее значение (вершина параболы, производная) *с обоснованием*.
5. **Ответь на вопрос.** Именно той величиной и в тех единицах, о которых спрашивали. Проверь, правдоподобен ли результат.

ФИЗИКА

Физика, которую нужно знать в лицо

Закон Ома для участка цепи	$I = \dfrac{U}{R}$
Закон Ома для полной цепи (E — ЭДС, r — внутреннее сопротивление)	$I = \dfrac{E}{R + r}$
Закон Джоуля–Ленца: теплота и мощность на резисторе	$Q = I^2 R t, \;\; P = I^2 R = \dfrac{U^2}{R}$
Последовательное / параллельное соединение	$R_1 + R_2$ / $\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$
Бросок вверх ($g \approx 10$ м/с²)	$h = h_0 + v_0 t - \dfrac{g t^2}{2}$
Период и частота колебаний	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}, \;\; \nu = \dfrac{1}{T}$
Тонкая линза	$\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{F}$

ЗАМЕТКА

Карта тетради

1	Формула — это машина: подставляем	10
2	Из формулы — уравнение или неравенство	10
3	Текст → функция одной переменной	8
4	Наибольшее и наименьшее без производной	9
5	Производная — универсальный инструмент	8
6	Главные сюжеты задания 17 (6 тем)	22
7	Формат ЕГЭ-2027: 6 вариантов по 2 задачи	12

Как работать: один блок за одно-два занятия. Сначала прочитай разбор, потом решай сам. Ответы сверяй в конце тетради только после того, как решишь задачу.

БЛОК 1

1 Формула — это машина: подставляем и вычисляем

В задании 17 почти всегда есть формула: её дают в условии или её нужно вспомнить. Первый навык — подставить числа без ошибок.

РАЗБОР

Мощность электроплитки

Плитка включена в сеть напряжением $U = 220$ В, сопротивление спирали $R = 55$ Ом. Найдите мощность по формуле $P = \dfrac{U^2}{R}$.

$$P = \frac{220^2}{55} = \frac{48\,400}{55} = 880 \text{ Вт}.$$

Удобнее сначала сократить: $\dfrac{220}{55} = 4$, значит $P = 220 \cdot 4 = 880$ Вт. **Ответ:** 880 Вт.

ПРАВИЛО

Три привычки

1) Все величины переводим в одни единицы (обычно СИ: метры, секунды, омы, вольты). 2) Сначала сокращаем, потом умножаем. 3) Проверяем, правдоподобен ли ответ: чайник на 50 000 Вт — повод искать ошибку.

1.1 Сила тока $I = \dfrac{U}{R}$. Найдите I (в амперах) при $U = 12$ В, $R = 4$ Ом.

Ответ: _____

1.2 Мощность $P = I^2 R$. Найдите P (в ваттах) при $I = 5$ А, $R = 8$ Ом.

Ответ: _____

1.3 Высота подброшенного мяча $h(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$. Найдите h (в метрах) при $v_0 = 20$ м/с, $g = 10$ м/с², $t = 3$ с.

Ответ: _____

1.4 Кинетическая энергия $E_к = \dfrac{mv^2}{2}$. Найдите $E_к$ (в джоулях) при $m = 4$ кг, $v = 6$ м/с.

Ответ: _____

1.5 Закон Ома для полной цепи: $I = \dfrac{E}{R + r}$. Найдите I при $E = 24$ В, $R = 5$ Ом, $r = 1$ Ом.

Ответ: _____

1.6 Собственная циклическая частота пружинного маятника $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Найдите ω_0 (рад/с) при $k = 200$ Н/м, $m = 2$ кг.

Ответ: _____

1.7 Два резистора 6 Ом и 3 Ом соединены параллельно: $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Найдите R.

Ответ: _____

1.8 Формула линзы $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{F}$. Предмет стоит на расстоянии $d = 30$ см от линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см. Найдите расстояние f до изображения.

Ответ: _____

1.9 Мощность во внешней цепи $P = \dfrac{E^2 R}{(R + r)^2}$. Найдите P при $E = 12$ В, $r = 2$ Ом, $R = 4$ Ом.

эта формула ещё встретится

Ответ: _____

1.10 Магазин продаёт товар по цене p рублей, спрос $q = 100 - 2p$ штук в день. Найдите дневную выручку $p \cdot q$ при $p = 30$.

Ответ: _____

2 БЛОК 2 Из формулы — уравнение или неравенство

Теперь известен результат, а найти нужно одну из величин в формуле. Получается уравнение. Если в вопросе есть слова «не менее», «не более», «выгоднее», получается неравенство.

РАЗБОР **Сколько секунд мяч выше 15 м**

Высота мяча меняется по закону $h(t) = 20t - 5t^2$ (м). Сколько секунд мяч находится на высоте не менее 15 м?

Составляем неравенство: $20t - 5t^2 \geq 15 \iff 5t^2 - 20t + 15 \leq 0 \iff t^2 - 4t + 3 \leq 0$. Корни: $t = 1$ и $t = 3$, решение: $1 \leq t \leq 3$.
Мяч выше 15 м с первой по третью секунду, это **2 секунды**.

ВЫВОД **«Сколько времени...» — это длина промежутка**

Если спрашивают, *сколько времени* величина выше (ниже) порога, ответ — длина промежутка: $t_2 - t_1$. Сами моменты t_1, t_2 ответом не являются.

ЛОВУШКА **Посторонний корень**

Из $I^2 = 25$ получается $I = \pm 5$. Сила тока в такой задаче — величина неотрицательная, поэтому остаётся $I = 5$. Отбор корней по смыслу — часть решения, его нужно записать.

2.1 Мощность $P = I^2R$. При каком токе на резисторе 20 Ом выделяется мощность 500 Вт?

Ответ: _____

2.2 Источник: $E = 36$ В, $r = 2$ Ом. Каким должно быть сопротивление R нагрузки, чтобы ток был 4 А? $\left(I = \dfrac{E}{R + r}\right)$

Ответ: _____

2.3 Камень подброшен вверх, $h(t) = 25t - 5t^2$ (м). Сколько секунд он находится на высоте не менее 30 м?

Ответ: _____

2.4 Линза с фокусным расстоянием $F = 12$ см. На каком расстоянии d от линзы нужно поставить предмет, чтобы изображение получилось на расстоянии $f = 36$ см?

Ответ: _____

2.5 $E = 10$ В, $r = 1$ Ом, $P = \dfrac{E^2R}{(R + r)^2}$. При каких R мощность на нагрузке равна 16 Вт? Найдите все значения.

Ответ: _____

2.6 Спрос $q = 120 - 4p$ (шт.), выручка $p \cdot q$. При какой наибольшей цене p выручка будет не меньше 800 руб.?

Ответ: _____

2.7 Тормозной путь $s = \dfrac{v^2}{2a}$, где $a = 5$ м/с². Какая наибольшая скорость допустима, если тормозной путь не должен превышать 40 м? Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____

2.8 Масса радиоактивного вещества $m(t) = 80 \cdot 2^{-t/5}$ (мг), t — в минутах. Через сколько минут масса станет не больше 5 мг?

Ответ: _____

2.9 Два резистора при последовательном соединении дают 9 Ом, при параллельном 2 Ом. Найдите большее сопротивление. *Составьте систему.*

Ответ: _____

2.10 Катер проходит 36 км по течению за 2 ч, а против течения за 3 ч. Найдите собственную скорость катера.

Ответ: _____

3 БЛОК 3 Текст → функция одной переменной

Главный шаг задания 17: из словесного описания получить функцию. Если неизвестных две, связываем их условием задачи (периметр, объём, путь) и одну выражаем через другую.

РАЗБОР **Участок у стены**

Прямоугольный участок примыкает к длинной стене, а с трёх других сторон огорожен забором длиной 40 м. Выразите площадь участка через одну переменную.

Пусть x м — длина каждой из двух сторон, перпендикулярных стене. Тогда сторона, параллельная стене, равна $40 - 2x$.
Модель: $S(x) = x(40 - 2x)$. Ограничения: $x > 0$ и $40 - 2x > 0$, то есть $0 < x < 20$.
Без ограничений модель неполная: например, при $x = 25$ формула даёт отрицательную площадь.

ПРАВИЛО **Чек-лист модели**

☐ буквой обозначена величина, которую мы выбираем (длина, скорость, цена, сопротивление); ☐ остальные величины выражены через неё; ☐ записана формула искомой величины; ☐ записаны ограничения по смыслу.

В задачах 3.1–3.8: составьте функцию, укажите ограничения на переменную и вычислите значение функции в указанной точке.

3.1 Периметр прямоугольника 30 см, одна сторона x см. Площадь $S(x)$; найдите $S(4)$.

Ответ: _____

3.2 Из квадратного листа 12×12 см по углам вырезают квадраты со стороной x и сгибают открытую коробку. Объём $V(x)$; найдите $V(2)$.

Ответ: _____

3.3 Источник: $E = 12$ В, $r = 3$ Ом, нагрузка R. Выразите мощность на нагрузке $P(R)$ (закон Ома + Джоуль–Ленц); найдите $P(3)$.

Ответ: _____

3.4 Грузовик проходит 300 км со скоростью v км/ч. Расходы за час: $0{,}5v^2$ руб. на топливо и 1800 руб. оплата водителя. Стоимость поездки $C(v)$; найдите $C(90)$.

Ответ: _____

3.5 Себестоимость изделия 10 руб., при цене p продают $200 - 5p$ штук. Прибыль $\Pi(p)$; найдите $\Pi(20)$.

Ответ: _____

3.6 Лист жести шириной 24 см сгибают в жёлоб: края шириной x см загибают вверх под прямым углом. Площадь поперечного сечения $S(x)$; найдите $S(5)$.

Ответ: _____

3.7 Бак без крышки с квадратным дном (сторона a дм) имеет объём 32 дм³. Площадь поверхности $S(a)$; найдите $S(2)$.

Ответ: _____

3.8 При цене билета 500 руб. приходят 300 зрителей. Каждое повышение цены на 50 руб. уменьшает число зрителей на 20. Выручка $B(n)$ после n повышений; найдите $B(5)$.

Ответ: _____

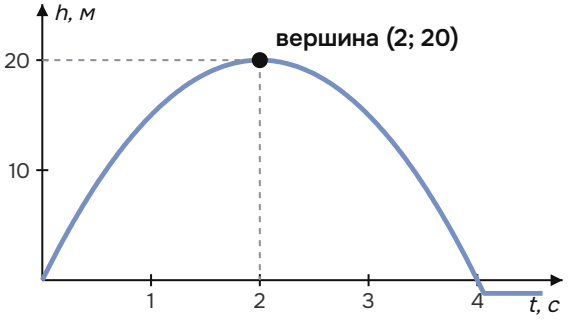
БЛОК 4

4 Наибольшее и наименьшее без производной: парабола

Многие модели оказываются квадратичными. Для них наибольшее или наименьшее значение можно найти через вершину параболы, без производной.

РАЗБОР **Наивысшая точка полёта**

$h(t) = 20t - 5t^2$. Найдите наибольшую высоту мяча.



Корни: $h = 0$ при $t = 0$ и $t = 4$. Парабола симметрична, поэтому вершина лежит посередине между корнями: $t = 2$.
$h(2) = 40 - 20 = 20$ м. Ветви направлены вниз (коэффициент при t^2 отрицательный), значит, это наибольшее значение. **Ответ:** 20 м.

ВЫВОД **Вершина параболы**

Для $y = ax^2 + bx + c$ середина между корнями равна $x_в = -\dfrac{b}{2a}$. При $a < 0$ в вершине наибольшее значение, при $a > 0$ — наименьшее. Если корней нет, формула верна всё равно.

ЛОВУШКА **Вершина вне допустимых значений**

Если $x_в$ не попадает в промежуток, разрешённый условием, наибольшее (наименьшее) значение достигается на его *конце*. А если переменная целая (число повышений цены, число деталей), берут ближайшие к вершине целые значения и сравнивают их.

ПРИЁМ **Расстояние — через квадрат**

Корень $d = \sqrt{\dots}$ наименьший тогда же, когда наименьшее подкоренное выражение. Поэтому исследуем d^2: обычно это квадратичная функция.

4.1 Из всех прямоугольников с периметром 40 см найдите площадь наибольшего.

Ответ: _____

4.2 Участок у стены, забор 40 м (разбор блока 3). Найдите наибольшую площадь.

Ответ: _____

4.3 Мяч брошен с высоты 2 м: $h(t) = 2 + 20t - 5t^2$. Найдите наибольшую высоту.

Ответ: _____

4.4 Прибыль $\Pi(p) = (p - 10)(200 - 5p)$ (задача 3.5). При какой цене она наибольшая и чему равна?

Ответ: _____

4.5 Билеты (задача 3.8). Найдите наибольшую возможную выручку. *Учтите, что n — целое.*

Ответ: _____

4.6 Жёлоб из листа шириной 24 см (задача 3.6). При каком x площадь сечения наибольшая? Найдите её.

Ответ: _____

4.7 У источника $E = 12$ В и $r = 2$ Ом. Мощность во внешней цепи можно записать через ток: $P = EI - I^2 r$ (полная мощность источника минус потери внутри него). Найдите наибольшую мощность и ток, при котором она достигается.

Ответ: _____

4.8 Прибыль завода $\Pi(x) = -x^2 + 20x - 36$ (млн руб.), где x — выпуск в тыс. шт. Завод может выпустить не более 6 тыс. шт. Найдите наибольшую прибыль.

Ответ: _____

4.9 От перекрёстка на восток выезжает машина со скоростью 60 км/ч. В тот же момент другая машина находится в 100 км к северу от перекрёстка и едет к нему со скоростью 80 км/ч. Найдите наименьшее расстояние между машинами.

Ответ: _____

5 БЛОК 5 Производная — универсальный инструмент

Модели вида $\frac{a}{x} + bx$, $\frac{x}{(x+a)^2}$ или с корнями параболой уже не являются. Для них нужна производная. Это главный инструмент задания 17.

ПРАВИЛО

Что нужно уметь дифференцировать

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\qquad (f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$

ПРАВИЛО

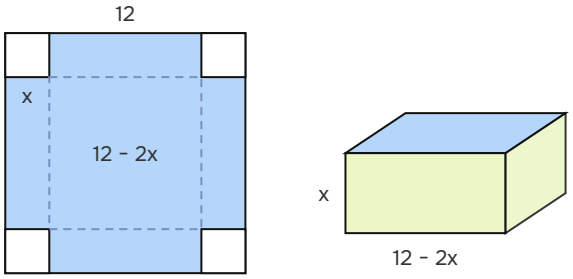
Алгоритм поиска наибольшего / наименьшего

1. Записать функцию и промежуток (из смысла задачи).
2. Найти производную и разложить её на множители.
3. Решить $f'(x) = 0$; оставить точки внутри промежутка.
4. Определить знаки f' слева и справа от точки *или* сравнить значения в точке и на концах.
5. Сделать вывод: «x_0 — точка максимума, единственная на промежутке, значит, наибольшее значение $f(x_0)$».

РАЗБОР

Коробка наибольшего объёма

Из квадратного листа 12×12 по углам вырезают квадраты со стороной x и сгибают коробку (задача 3.2). При каком x объём наибольший?



$V(x) = x(12-2x)^2$, $0 < x < 6$.
$V'(x) = (12-2x)^2 + x \cdot 2(12-2x)\cdot(-2) = (12-2x)(12-2x-4x) = (12-2x)(12-6x)$.
$V' = 0$ при $x = 2$ и $x = 6$; в промежуток $(0;6)$ попадает только $x = 2$.
На $(0;2)$: $V' > 0$, функция возрастает; на $(2;6)$: $V' < 0$, убывает. Значит, $x = 2$ — точка максимума, $V(2) = 2 \cdot 8^2 = 128$. **Ответ:** $x = 2$, $V = 128$.

ЛОВУШКА

Где теряют балл

Нашли $f'(x) = 0$ и сразу написали ответ. Обращение производной в ноль ещё не означает максимум. Нужна фраза-обоснование: знаки производной или сравнение значений. Без неё полный балл не ставят.

В задачах 5.1–5.8 найдите точку и значение требуемого экстремума с обоснованием.

5.1 Наименьшее значение $f(x) = x^3 - 12x$ на $[0;3]$.

Ответ: _____

5.2 Наименьшее значение $f(x) = x^2 + \frac{54}{x}$ при $x > 0$.

Ответ: _____

5.3 Наименьшее значение $f(v) = 600v + \frac{540\,000}{v}$ при $v > 0$.

Ответ: _____

5.4 Наибольшее значение $f(x) = \dfrac{64x}{(x+4)^2}$ при $x > 0$.

Ответ: _____

5.5 Наименьшее значение $f(x) = 2x + \dfrac{50}{x}$ при $x > 0$.

Ответ: _____

5.6 Наименьшее значение $g(u) = (16-u)^2 + 8u$. пригодится для резонанса

Ответ: _____

5.7 Наименьшее значение $f(x) = 5\sqrt{x^2+9} - 4x$.

Ответ: _____

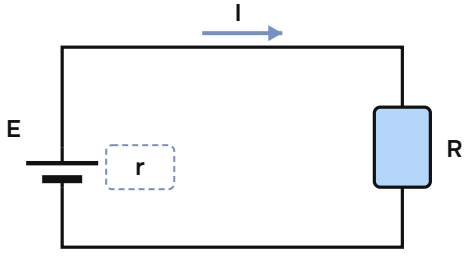
5.8 Наибольшее значение $V(x) = x(24-2x)^2$ при $0 < x < 12$.

Ответ: _____

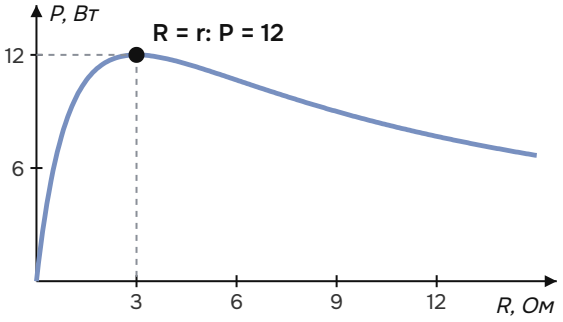
6 БЛОК 6 Главные сюжеты задания 17

Шесть типовых сюжетов. В каждом есть разбор с полным решением, вывод, который полезно помнить, и задачи для самостоятельной работы. Первые два сюжета соответствуют задачам проекта демоверсии.

6.1 Генератор и нагрузка: наибольшая тепловая мощность



источник (E, r) — нагрузка R



РАЗБОР **Мощность на нагрузке**

Источник с ЭДС $E = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 3$ Ом замкнут на нагрузку сопротивлением R. При каком R тепловая мощность на нагрузке наибольшая? Найдите её.

Модель. По закону Ома для полной цепи $I = \dfrac{12}{R+3}$. По закону Джоуля–Ленца $P = I^2R = \dfrac{144R}{(R+3)^2}$, где $R > 0$.

Исследование. $P'(R) = 144 \cdot \dfrac{(R+3)^2 - R\cdot 2(R+3)}{(R+3)^4} = 144 \cdot \dfrac{(R+3)-2R}{(R+3)^3} = \dfrac{144(3-R)}{(R+3)^3}$.

$P' > 0$ при $0 < R < 3$ и $P' < 0$ при $R > 3$. Значит, $R = 3$ — точка максимума, единственная на $(0;+\infty)$, и в ней достигается наибольшее значение.

$P(3) = \dfrac{144 \cdot 3}{36} = 12$ Вт. **Ответ:** $R = 3$ Ом, $P = 12$ Вт.

ВЫВОД **Согласование нагрузки**

Повторив вычисление в общем виде, получим: мощность во внешней цепи наибольшая при $R = r$ и равна $P_{\max} = \dfrac{E^2}{4r}$. Ток в этом режиме $I = \dfrac{E}{2r}$, а КПД источника 50%.

Ещё два способа без производной. 1) Через ток: $P = EI - I^2 r$ — парабола (задача 4.7). 2) Через неравенство о средних: $P = \dfrac{E^2}{R + 2r + r^2/R}$, а $R + \dfrac{r^2}{R} \geq 2r$.

ЛОВУШКА **Две ловушки**

1) «Внутренним» считается всё, что включено последовательно с нагрузкой: провода, добавочный резистор. 2) Если R ограничено промежутком, в который r не попадает, максимум достигается на конце промежутка. Мощность, выделяемая *внутри* источника, $I^2 r$, растёт при уменьшении R, и внутренней точки максимума у неё нет.

6.1.1 Генератор имеет ЭДС 200 В и внутреннее сопротивление $0{,}5$ Ом. Какую наибольшую мощность он может отдать во внешнюю цепь? Ответ в кВт.

Ответ: _____

6.1.2 $E = 30$ В, $r = 1$ Ом. Последовательно с переменным резистором R включён постоянный резистор 2 Ом. При каком R мощность на переменном резисторе наибольшая? Найдите её.

Ответ: _____

6.1.3 $E = 12$ В, $r = 2$ Ом, сопротивление нагрузки можно менять от 1 до 10 Ом. При каком R тепловая мощность, выделяющаяся *внутри источника*, наибольшая? Найдите её.

Ответ: _____

6.1.4 $E = 24$ В, $r = 2$ Ом, нагрузку можно менять от 4 до 10 Ом. Найдите наибольшую мощность на нагрузке.

Ответ: _____

6.1.5 Наибольшая мощность во внешней цепи равна 50 Вт и достигается при токе 5 А. Найдите ЭДС источника.

Ответ: _____

6.2 Корабль на волнах: резонанс

Волны раскачивают корабль с периодом T (период волн). У самого корабля есть собственный период качки T_0. Чем ближе T к «опасному» значению, тем сильнее качка. В задаче даётся формула амплитуды, например

$$A(T) = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{T_0^2}{T^2}\right)^2 + \dfrac{k}{T^2}}},$$

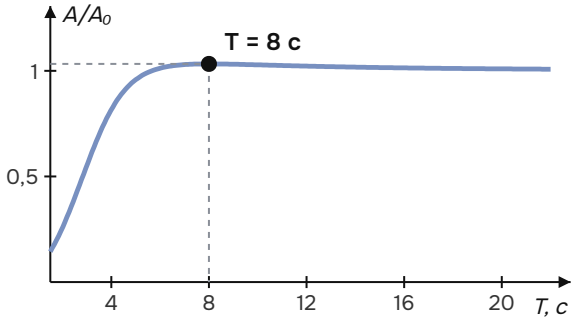
где k учитывает сопротивление воды.

ПРИЁМ **Две идеи, которые решают задачу**

1) Дробь с постоянным положительным числителем наибольшая, когда знаменатель наименьший. Корень наименьший, когда наименьшее подкоренное выражение. 2) Замена $u = \dfrac{1}{T^2}$ превращает подкоренное выражение в квадратный трёхчлен относительно u.

РАЗБОР **Период волн при наибольшей качке**

$T_0 = 4$ с, $k = 24$. При каком периоде волн амплитуда качки наибольшая?



Подкоренное выражение: $g = \left(1 - \dfrac{16}{T^2}\right)^2 + \dfrac{24}{T^2}$. Пусть $u = \dfrac{1}{T^2} > 0$:

$$g(u) = (1 - 16u)^2 + 24u = 256u^2 - 8u + 1.$$

Это парабола с ветвями вверх, её вершина $u = \dfrac{8}{2 \cdot 256} = \dfrac{1}{64} > 0$, в ней g наименьшее. Тогда A наибольшая. $\dfrac{1}{T^2} = \dfrac{1}{64} \Rightarrow T = 8$ с (берём $T > 0$). **Ответ:** 8 с.

ВЫВОД **Резонансный период**

В общем виде $u^* = \dfrac{2T_0^2 - k}{2T_0^4}$. При слабом сопротивлении (k мало) резонансный период близок к собственному T_0. В разборе сопротивление велико ($k = 24$), поэтому пик пологий и сдвинут от $T_0 = 4$ с к 8 с. При $k \geq 2T_0^2$ максимума нет: качка монотонно меняется с периодом. Если формула дана через циклическую частоту ω, делаем замену $u = \omega^2$, а в конце находим $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

6.2.1 $T_0 = 3$ с, $k = 10$ (формула та же). При каком периоде волн амплитуда качки наибольшая?

Ответ: _____

6.2.2 Амплитуда качки $A(\omega) = \dfrac{60}{\sqrt{(20 - \omega^2)^2 + 8\omega^2}}$ (см), ω – циклическая частота волн, рад/с. Найдите ω, при которой амплитуда наибольшая, саму амплитуду и период волн.

Ответ: _____

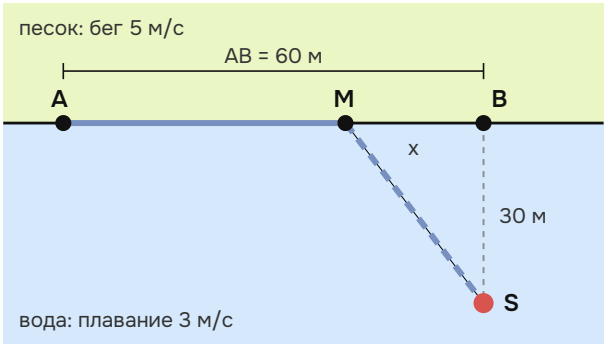
6.2.3 $T_0 = 2$ с, $k = 6$. При каком периоде волн амплитуда качки наибольшая?

Ответ: _____

6.3 Движение: наименьшее время, наибольшая высота и дальность

РАЗБОР Спасатель

Спасатель стоит на берегу в точке A. Тонущий находится в точке S, в 30 м от берега; ближайшая к нему точка берега B отстоит от A на 60 м. По песку спасатель бежит со скоростью 5 м/с, плывёт со скоростью 3 м/с. В какой точке M ему войти в воду, чтобы добраться быстрее всего, и за какое время он доберётся?



Пусть $BM = x$, $0 \le x \le 60$. Время: $t(x) = \dfrac{60 - x}{5} + \dfrac{\sqrt{x^2 + 900}}{3}$.

$t'(x) = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{x}{3\sqrt{x^2 + 900}} = 0 \iff 5x = 3\sqrt{x^2 + 900} \iff 25x^2 = 9x^2 + 8100 \iff x = 22{,}5.$

$t' < 0$ при $x < 22{,}5$ и $t' > 0$ при $x > 22{,}5$, значит, это точка минимума. $\sqrt{22{,}5^2 + 900} = 37{,}5$, $t = \dfrac{37{,}5}{5} + \dfrac{37{,}5}{3} = 7{,}5 + 12{,}5 = 20$ с.

Ответ: войти в воду в $22{,}5$ м от B; 20 с.

ВЫВОД Закон «преломления»

В точке оптимума $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \dfrac{v_{\text{вода}}}{v_{\text{песок}}}$: синус угла между путём в воде и перпендикуляром к берегу равен отношению скоростей. Свет на границе сред выбирает путь по тому же правилу.

6.3.1 Деревня находится в 8 км от прямой дороги, станция стоит на дороге в 20 км от ближайшей к деревне точки дороги. По полю можно идти со скоростью 3 км/ч, по дороге 5 км/ч. В какой точке нужно выйти на дорогу и за какое наименьшее время (в минутах) можно дойти до станции?

Ответ: _____

6.3.2 Мяч бросают с земли со скоростью 20 м/с под углом α к горизонту, дальность $L = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, $g = 10$. При каком α дальность наибольшая? Чему она равна?

Ответ: _____

6.3.3 Мяч бросают вверх с балкона: $h(t) = 15 + 10t - 5t^2$ (м). Найдите наибольшую высоту мяча и время до падения на землю.

Ответ: _____

6.3.4 Собирающая линза, $F = 15$ см. Предмет ставят на расстоянии $d > F$, изображение действительное. Найдите наименьшее расстояние между предметом и его изображением.

Ответ: _____

6.4 Экономика и производство

РАЗБОР **Объём выпуска с наибольшей прибылью**

Завод выпускает x тыс. изделий в месяц ($0 \le x \le 20$) и продаёт их по 90 тыс. руб. за тысячу штук. Издержки $C(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 100$ тыс. руб. При каком выпуске прибыль наибольшая?

$\Pi(x) = 90x - C(x) = -x^3 + 3x^2 + 72x - 100$.
$\Pi'(x) = -3x^2 + 6x + 72 = -3(x^2 - 2x - 24) = -3(x-6)(x+4)$. На $[0;20]$: $\Pi' > 0$ при $x < 6$ и $\Pi' < 0$ при $x > 6$, значит, $x = 6$ — точка максимума.
$\Pi(6) = -216 + 108 + 432 - 100 = 224$ тыс. руб. **Ответ:** 6 тыс. изделий, прибыль 224 тыс. руб.

6.4.1 При налоге t руб. с изделия продают $400 - 8t$ тыс. изделий. При какой ставке налоговый сбор наибольший? Найдите сбор (тыс. руб.).

Ответ: _____

6.4.2 Расходы теплохода на топливо за час составляют $0{,}5v^3$ руб. (v — скорость, км/ч), прочие расходы — 8000 руб./ч. При какой скорости затраты на 1 км пути наименьшие?

Ответ: _____

6.4.3 Грузовик из задачи 3.4, скорость не выше 90 км/ч. При какой скорости поездка обойдётся дешевле всего и во сколько?

Ответ: _____

6.5 Геометрия конструкций

РАЗБОР **Бак с наименьшим расходом металла**

Бак без крышки с квадратным дном должен иметь объём 32 дм³. При какой стороне дна на него уйдёт меньше всего металла?

Сторона дна a, высота $h = \dfrac{32}{a^2}$. Площадь: $S(a) = a^2 + 4ah = a^2 + \dfrac{128}{a}$, $a > 0$.
$S'(a) = 2a - \dfrac{128}{a^2} = \dfrac{2(a^3 - 64)}{a^2} = 0 \iff a = 4$. $S' < 0$ при $a < 4$ и $S' > 0$ при $a > 4$, значит, это минимум.
$h = 2$, $S(4) = 16 + 32 = 48$ дм². **Ответ:** 4 дм (высота 2 дм).

6.5.1 Из прямоугольного листа 16×10 см по углам вырезают квадраты со стороной x и сгибают коробку. Найдите наибольший объём.

Ответ: _____

6.5.2 Цилиндрическая банка с крышкой и дном имеет объём 54π см³. При каком радиусе на неё уйдёт меньше всего жести? Какова при этом высота?

Ответ: _____

6.5.3 Прямоугольник вписан в фигуру под параболой $y = 12 - x^2$ (над осью Ox), одна сторона лежит на оси. Найдите наибольшую площадь.

Ответ: _____

6.6 Модели-уравнения, неравенства и системы

РАЗБОР **Мяч должен подняться выше 20 м**

Мяч подбрасывают вертикально вверх, наибольшая высота подъёма $H = \dfrac{v_0^2}{2g}$, $g = 10$ м/с². При каких начальных скоростях мяч поднимется не ниже 20 м?

$\dfrac{v_0^2}{20} \geq 20 \iff v_0^2 \geq 400 \iff v_0 \geq 20$ (скорость положительна). **Ответ:** $v_0 \geq 20$ м/с.

6.6.1 Тариф А: 300 руб. в сутки + 10 руб./км. Тариф Б: 900 руб. в сутки, первые 50 км бесплатно, далее 6 руб./км. При каком суточном пробеге тариф Б выгоднее?

Ответ: _____

6.6.2 $E = 10$ В, $r = 1$ Ом. При каких R мощность на нагрузке не меньше 16 Вт? (Сравните с задачей 2.5.)

Ответ: _____

6.6.3 Массы двух изотопов: $m_1 = 64 \cdot 2^{-t/2}$ мг и $m_2 = 4 \cdot 2^{-t/6}$ мг (t — сутки). Через сколько суток массы сравняются?

Ответ: _____

6.6.4 Есть сплавы с содержанием меди 10% и 40%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы получить 30 кг сплава с 20% меди?

Ответ: _____

7

БЛОК 7

Формат ЕГЭ-2027: полное решение на 2 балла

Здесь задачи оформляются так же, как на экзамене. В каждом варианте две задачи, решите одну на выбор, лучше обе.

РАЗБОР

Образец оформления

Генератор с ЭДС 120 В и внутренним сопротивлением 4 Ом питает нагревательный элемент. Каким должно быть сопротивление элемента, чтобы тепловая мощность нагревателя была наибольшей? Найдите эту мощность.

Решение. Пусть R Ом — сопротивление нагревателя, $R > 0$. По закону Ома для полной цепи сила тока $I = \dfrac{120}{R+4}$. По закону Джоуля–Ленца тепловая мощность нагревателя

$$P(R) = I^2 R = \frac{14\,400R}{(R+4)^2}.$$

Найдём наибольшее значение $P(R)$ на промежутке $(0;+\infty)$:

$$P'(R) = 14\,400 \cdot \frac{(R+4)^2 - 2R(R+4)}{(R+4)^4} = \frac{14\,400\,(4-R)}{(R+4)^3}.$$

$P'(R) > 0$ при $0 < R < 4$ и $P'(R) < 0$ при $R > 4$, значит, $R = 4$ — точка максимума функции. Других точек экстремума на промежутке нет, поэтому в ней достигается наибольшее значение: $P(4) = \dfrac{14\,400 \cdot 4}{64} = 900$ Вт.

Ответ: 4 Ом; 900 Вт.

ПРАВИЛО

Чек-лист «на 2 балла»

☐ введена переменная с единицами и ограничениями; ☐ записаны использованные законы или формулы; ☐ функция одной переменной выписана явно; ☐ производная найдена и разложена на множители; ☐ знаки производной (или сравнение значений) приведены и сделан вывод; ☐ ответ дан на *заданный* вопрос в нужных единицах.

ЛОВУШКА

Как будут оценивать (ориентир)

2 балла — модель верна, исследование обосновано, ответ верный. **1 балл** — модель верна, но допущена вычислительная ошибка или не обосновано, что найденная точка даёт наибольшее (наименьшее) значение.

Составлено по описанию проекта и опубликованным разборам. Официальные критерии будут в утверждённой демоверсии, их нужно сверить в ноябре.

ИТОГ

Я умею…

- ☐ подставлять числа в физическую формулу и проверять единицы
- ☐ составлять уравнение или неравенство по формуле и отбирать корни по смыслу
- ☐ выражать величину через одну переменную и записывать ограничения
- ☐ находить наибольшее и наименьшее значение квадратичной функции, в том числе на промежутке и в целых числах
- ☐ исследовать функцию производной и обосновывать максимум или минимум
- ☐ решать задачу о наибольшей мощности генератора и задачу о резонансе
- ☐ оформлять полное решение по чек-листу на 2 балла

Вариант 1 решите одну задачу на выбор

А. Генератор с ЭДС 50 В и внутренним сопротивлением 1 Ом подключён к нагревателю проводами общим сопротивлением $1{,}5$ Ом. Каким должно быть сопротивление нагревателя, чтобы на нём выделялась наибольшая тепловая мощность? Найдите эту мощность.

Б. Амплитуда качки корабля $A(T)=\dfrac{A_0}{\sqrt{\left(1-\dfrac{36}{T^2}\right)^2+\dfrac{40}{T^2}}}$, где T – период волн в секундах. При каком периоде волн качка наибольшая?

Ответ: _____

Вариант 2 решите одну задачу на выбор

А. Наибольшая мощность, которую источник с внутренним сопротивлением $0{,}8$ Ом может отдать во внешнюю цепь, равна 45 Вт. Найдите ЭДС источника и силу тока в этом режиме.

Б. Амплитуда вынужденных колебаний $A(\omega) = \dfrac{72}{\sqrt{(15-\omega^2)^2 + 12\omega^2}}$ (мм), ω — циклическая частота, рад/с. Найдите наибольшую амплитуду и частоту, при которой она достигается.

Ответ: _____

Вариант 3 решите одну задачу на выбор

А. Источник: ЭДС 36 В, внутреннее сопротивление 2 Ом. Ток через источник не должен превышать 6 А. Какую наибольшую мощность можно получить на нагрузке? При каком сопротивлении нагрузки?

Б. Спасатель стоит на берегу в 100 м от точки B, ближайшей к тонущему, а тонущий находится в 30 м от берега. По песку спасатель бежит со скоростью 5 м/с, плывёт со скоростью 4 м/с. За какое наименьшее время он доберётся до тонущего?

Ответ: _____

Вариант 4 решите одну задачу на выбор

А. Завод выпускает x тыс. изделий в месяц ($0 \le x \le 15$) и продаёт по 141 тыс. руб. за тысячу штук. Издержки $C(x) = x^3 - 9x^2 + 60x + 80$ тыс. руб. Найдите выпуск, при котором прибыль наибольшая, и эту прибыль.

Б. Расходы судна на топливо за час составляют $0{,}2v^3$ руб., прочие расходы — 1350 руб./ч. При какой скорости стоимость 1 км пути наименьшая? Чему она равна?

Ответ: _____

Вариант 5 решите одну задачу на выбор

А. Собирающая линза имеет фокусное расстояние 12 см. Найдите наименьшее расстояние между предметом и его действительным изображением.

Б. Из бревна диаметром 20 см вырезают балку прямоугольного сечения шириной b и высотой h. Жёсткость балки пропорциональна bh^3. При какой ширине жёсткость наибольшая?

Ответ: _____

Вариант 6 решите одну задачу на выбор

А. Фирма-монополист: цена $p = 100 - 2q$ руб. при выпуске q тыс. шт., издержки $C = 10q + q^2$ тыс. руб. Найдите выпуск и цену, при которых прибыль наибольшая, и саму прибыль.

Б. Корабль A выходит из порта на восток со скоростью 30 км/ч. В тот же момент корабль B находится в 50 км к северу от порта и идёт к порту со скоростью 40 км/ч. Найдите наименьшее расстояние между кораблями.

Ответ: _____

ПРОВЕРКА

Ответы

Блок 1 · Подстановка	
1.1	3 А
1.2	200 Вт
1.3	15 м
1.4	72 Дж
1.5	4 А
1.6	10 рад/с
1.7	2 Ом
1.8	60 см
1.9	16 Вт
1.10	1200 руб.

Блок 2 · Уравнения и неравенства	
2.1	5 А
2.2	7 Ом
2.3	1 с
2.4	18 см
2.5	0,25 Ом и 4 Ом
2.6	20 руб.
2.7	72 км/ч (20 м/с)
2.8	20 мин
2.9	6 Ом
2.10	15 км/ч

Блок 3 · Функция из текста	
3.1	$S = x(15 - x),\ 0 < x < 15;\ S(4) = 44$
3.2	$V = x(12 - 2x)^2,\ 0 < x < 6;\ V(2) = 128$
3.3	$P = \dfrac{144R}{(R+3)^2},\ R > 0;\ P(3) = 12$
3.4	$C = 150v + \dfrac{540\,000}{v},\ v > 0;\ C(90) = 19\,500$
3.5	$\Pi = (p - 10)(200 - 5p),\ 10 < p < 40;\ \Pi(20) = 1000$
3.6	$S = x(24 - 2x),\ 0 < x < 12;\ S(5) = 70$
3.7	$S = a^2 + \dfrac{128}{a},\ a > 0;\ S(2) = 68$
3.8	$B = (500 + 50n)(300 - 20n),\ n = 0, 1, \ldots, 14;\ B(5) = 150\,000$

Блок 4 · Парабола	
4.1	100 см²
4.2	200 м² (при x = 10)
4.3	22 м
4.4	p = 25 руб., 1125 руб.
4.5	156 000 руб. (n = 2 или n = 3)
4.6	x = 6 см, 72 см²
4.7	I = 3 А, P = 18 Вт
4.8	48 млн руб. (при x = 6)
4.9	60 км (через 0,8 ч)

Блок 5 · Производная	
5.1	-16 (при x = 2)
5.2	27 (при x = 3)
5.3	36 000 (при v = 30)
5.4	4 (при x = 4)
5.5	20 (при x = 5)
5.6	112 (при u = 12)
5.7	9 (при x = 4)
5.8	1024 (при x = 4)

Блок 6 · Сюжеты задания 17	
6.1.1	20 кВт
6.1.2	R = 3 Ом, 75 Вт
6.1.3	R = 1 Ом, 32 Вт
6.1.4	64 Вт (при R = 4 Ом)
6.1.5	20 В
6.2.1	4,5 с
6.2.2	ω = 4 рад/с, A = 5 см, T = π/2 ≈ 1,57 с
6.2.3	4 с
6.3.1	в 6 км от ближайшей точки; 368 мин
6.3.2	α = 45°, 40 м
6.3.3	20 м; 3 с
6.3.4	60 см (при d = 30 см)
6.4.1	t = 25 руб., 5000 тыс. руб.
6.4.2	20 км/ч (600 руб./км)
6.4.3	60 км/ч, 18 000 руб.
6.5.1	144 см³ (при x = 2)
6.5.2	r = 3 см, h = 6 см
6.5.3	32 (при x = 2)
6.6.1	больше 75 км
6.6.2	0,25 ≤ R ≤ 4 Ом
6.6.3	12 суток
6.6.4	20 кг

Блок 7 · Варианты ЕГЭ	
В1-А	2,5 Ом; 250 Вт
В1-Б	9 с
В2-А	12 В; 7,5 А
В2-Б	A = 6 мм при ω = 3 рад/с
В3-А	144 Вт при R = 4 Ом
В3-Б	24,5 с
В4-А	9 тыс. шт.; 649 тыс. руб.
В4-Б	15 км/ч; 135 руб./км
В5-А	48 см (d = 24 см)
В5-Б	b = 10 см (h = 10√3 ≈ 17,3 см)
В6-А	q = 15, p = 70 руб., 675 тыс. руб.
В6-Б	30 км (через 48 мин)

Краткие решения задач блока 7

В1-А. Внутренним считаем всё, что включено последовательно с нагрузкой: $r_{\text{вн}} = 1 + 1{,}5 = 2{,}5$ Ом. $P = \dfrac{2500R}{(R+2{,}5)^2}$, $P' = \dfrac{2500(2{,}5-R)}{(R+2{,}5)^3}$: знак меняется с $+$ на $-$ при $R = 2{,}5$. $P_{\max} = \dfrac{2500}{4 \cdot 2{,}5} = 250$ Вт.

В1-Б. $u = \dfrac{1}{T^2}$: $g = (1-36u)^2 + 40u = 1296u^2 - 32u + 1$, вершина $u = \dfrac{32}{2592} = \dfrac{1}{81}$, наименьшее g даёт наибольшую A. $T = 9$ с.

В2-А. $P_{\max} = \dfrac{E^2}{4r}$ (максимум при $R = r$; доказательство через производную, как в образце). $E^2 = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 45 = 144$, $E = 12$ В, $I = \dfrac{E}{2r} = 7{,}5$ А.

В2-Б. $u = \omega^2$: $g(u) = (15-u)^2 + 12u = u^2 - 18u + 225$, вершина $u = 9$, $g(9) = 144$. $\omega = 3$ рад/с, $A_{\max} = \dfrac{72}{12} = 6$ мм.

В3-А. Ограничение: $\dfrac{36}{R+2} \le 6 \iff R \ge 4$. $P = \dfrac{1296R}{(R+2)^2}$, $P' = \dfrac{1296(2-R)}{(R+2)^3} < 0$ при $R \ge 4$: функция убывает, наибольшее значение на левом конце: $P(4) = \dfrac{1296 \cdot 4}{36} = 144$ Вт.

В3-Б. $t(x) = \dfrac{100-x}{5} + \dfrac{\sqrt{x^2+900}}{4}$, $0 \le x \le 100$. $t'(x) = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{x}{4\sqrt{x^2+900}} = 0 \iff \dfrac{x}{\sqrt{x^2+900}} = \dfrac{4}{5} \iff 9x^2 = 14\,400$, $x = 40$; t' меняет знак с $-$ на $+$. $t = \dfrac{60}{5} + \dfrac{50}{4} = 12 + 12{,}5 = 24{,}5$ с.

В4-А. $\Pi = -x^3 + 9x^2 + 81x - 80$, $\Pi' = -3(x^2 - 6x - 27) = -3(x-9)(x+3)$; на $[0;15]$ максимум при $x = 9$: $\Pi(9) = -729 + 729 + 729 - 80 = 649$.

В4-Б. Стоимость 1 км: $s(v) = \dfrac{0{,}2v^3 + 1350}{v} = 0{,}2v^2 + \dfrac{1350}{v}$, $s' = 0{,}4v - \dfrac{1350}{v^2} = 0 \iff v^3 = 3375$, $v = 15$; минимум (знак $- \to +$). $s(15) = 45 + 90 = 135$.

В5-А. $f = \dfrac{dF}{d-F}$, $L(d) = d + f = \dfrac{d^2}{d-12}$, $d > 12$. $L' = \dfrac{d(d-24)}{(d-12)^2}$, минимум при $d = 24$: $L = \dfrac{576}{12} = 48$ см.

В5-Б. $h^2 = 400 - b^2$; $J(b) = b(400-b^2)^{3/2}$, $0 < b < 20$. $J' = (400-b^2)^{1/2}(400 - b^2 - 3b^2) = \sqrt{400-b^2}\,(400 - 4b^2)$, ноль при $b = 10$, знак $+ \to -$. $b = 10$ см, $h = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ см.

В6-А. $\Pi(q) = (100-2q)q - 10q - q^2 = 90q - 3q^2$ — парабола, вершина $q = 15$; $p = 70$, $\Pi = 1350 - 675 = 675$ тыс. руб.

В6-Б. $d^2(t) = (30t)^2 + (50 - 40t)^2 = 2500t^2 - 4000t + 2500$, вершина $t = 0{,}8$ ч; $d^2 = 1600 - 3200 + 2500 = 900$, $d = 30$ км.

Источники сведений о задании: проект демоверсии и спецификации ЕГЭ-2027 (ФИПИ, fipi.ru), «План изменения КИМ ЕГЭ 2027» (ФИПИ), разборы mel.fm и 4ege.ru. Все числовые ответы проверены программно (SymPy).