ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

Финансовая математика: вклады, кредиты, оптимизация

Рабочая тетрадь · ЕГЭ профиль 2027 · задание №13

13 разобранных примеров | 58 задач + 8 в пробнике | таблицы долга и графики | подробные решения в конце

Ученик: _____ Дата начала: _____

Что изменилось в 2027 году

Экономическая задача (в ЕГЭ-2026 — №16) перенесена в первую часть и стала заданием №13 с кратким ответом. В бланк пишется только число, проверяется только ответ.

Отсюда два следствия: единицы ответа (рубли, млн, проценты) берём строго из вопроса, а ошибку в арифметике ничто не компенсирует — поэтому каждый ответ проверяем.

В бланк число пишется без пробелов: 1 250 000 → 1250000.

Как устроена тетрадь

- **Пример** — задача, решённая через таблицу долга и график.
- **Вывод** — правило, которое видно из решения. Формулы здесь появляются только так.
- **Задачи** — первые с заготовкой таблицы, дальше самостоятельно. ★ — повышенная сложность.
- В конце: ответы, затем подробные решения с таблицами.

Главный метод

Любая задача про кредит решается одной таблицей: **долг до → после начисления → платёж → долг после**. Числа удобно вести в миллионах, ставку записывать множителем $q = 1 + \frac{r}{100}$.

Уравнение почти всегда одно из двух: «долг после последнего платежа = 0» или «сумма выплат = ...».

Проверка ответа (30 секунд)

- Ответ в тех единицах, которые спрашивают?
- Ставка — разумное целое число?
- Сумма выплат больше кредита, переплата меньше кредита?
- Подставили ответ в таблицу — долг в конце 0?

Таблица прогресса

Модуль	1	2	3	4	5	6	7	Т
Задач	9	8	9	9	8	9	6	8
Верно								
Дата								

1 Проценты — это умножение

Цепочки изменений, налоги, тарифы, личные финансы

Пример 1 **Повысили, потом снизили**

Цену товара 2000 руб. сначала повысили на 10 %, а потом снизили на 10 %. Сколько стоит товар теперь?

Шаг	Было, руб.	Изменение	Множитель	Стало, руб.
1	2000	+10 % (от 2000)	1,1	2200
2	2200	-10 % (от 2200)	0,9	1980

2000 ×1,1 → **2200** ×0,9 → **1980**

Второе изменение считается от 2200, поэтому снижение (220 руб.) больше повышения (200 руб.).
Итог: 2000 · 1,1 · 0,9 = 2000 · 0,99 = 1980 руб. — цена упала на 1 %.

ВЫВОД 1

Увеличить на r % — значит умножить на $\frac{1+r}{100}$ (+10 % → ×1,1; +25 % → ×1,25).

Уменьшить на r % — значит умножить на $\frac{1-r}{100}$ (-13 % → ×0,87; -20 % → ×0,8).

Несколько изменений подряд — перемножаем множители. Каждое следующее изменение считается от нового значения.

Пример 2 **Налог: прямая и обратная задача**

Начисленная зарплата 70 000 руб., из неё удерживается НДФЛ 13 %. а) Сколько сотрудник получит на руки? б) Другой сотрудник получил на руки 60 900 руб. Сколько ему начислили?

	Начислено	Действие	На руки
а)	70 000	×0,87	70 000 · 0,87 = 60 900
б)	x	×0,87	60 900

б) x · 0,87 = 60 900 ⇒ x = 60 900 : 0,87 = 70 000 руб.

Частая ошибка: 60 900 + 13 % от 60 900 = 68 817. Здесь 13 % взяты от суммы на руки, а налог удерживали с начисленной суммы — база у процентов другая, ответ неверный.

ВЫВОД 2

Если известно значение **после** изменения, исходное находим делением на множитель: x = $\frac{\text{результат}}{\text{множитель}}$.

Задачи

1.1 Зарплата сотрудника — 65 000 руб. до вычета НДФЛ (13 %). Сколько рублей он получит на руки?

Заполните таблицу:

Было, руб.	Множитель	Стало, руб.
65 000		

Ответ:

1.2 После удержания НДФЛ 13 % сотрудник получил на руки 52 200 руб. Сколько рублей ему начислили?

Заполните таблицу:

Начислено	Множитель	На руки
x		52 200

Ответ:

1.3 Куртка стоила 5000 руб. Весной цену повысили на 20 %, осенью новую цену снизили на 20 %. Сколько рублей стоит куртка осенью?

Заполните таблицу:

Шаг	Было, руб.	Множитель	Стало, руб.
весна	5000		
осень			

Ответ:

1.4 Цену повысили на 25 %. На сколько процентов нужно снизить новую цену, чтобы она стала равна исходной?

Ответ:

1.5 Однотарифный счётчик: 6 руб. за 1 кВт·ч. Двухтарифный: днём 7 руб., ночью 3 руб. за 1 кВт·ч. Семья расходует 300 кВт·ч в месяц, из них 40 % — ночью. На сколько рублей в месяц меньше семья заплатит по более выгодному тарифу?

Ответ:

1.6 Карта А: кешбэк 5 % на продукты и 1 % на остальные покупки, обслуживание 150 руб. в месяц. Карта Б: кешбэк 2 % на всё, обслуживание бесплатное. За месяц семья тратит 20 000 руб. на продукты и 15 000 руб. на остальное. На сколько рублей в месяц выгода от более выгодной карты больше, чем от другой?

Ответ:

1.7 За год цены выросли на 4 %, а вклад принёс 17 %. На сколько процентов больше товаров можно купить на деньги со вклада, чем год назад?

Ответ:

1.8 Акции компании за первый год подешевели на 20 %, за второй год подорожали на r %. В итоге они стоят на 8 % дороже, чем в начале. Найдите r.

Ответ:

1.9 Доход семьи 150 000 руб. в месяц, из них 9000 руб. уходит на оплату ЖКХ. Тарифы ЖКХ выросли на 12 %, а доход — на 5 %. Сколько процентов дохода теперь уходит на ЖКХ?

Ответ:

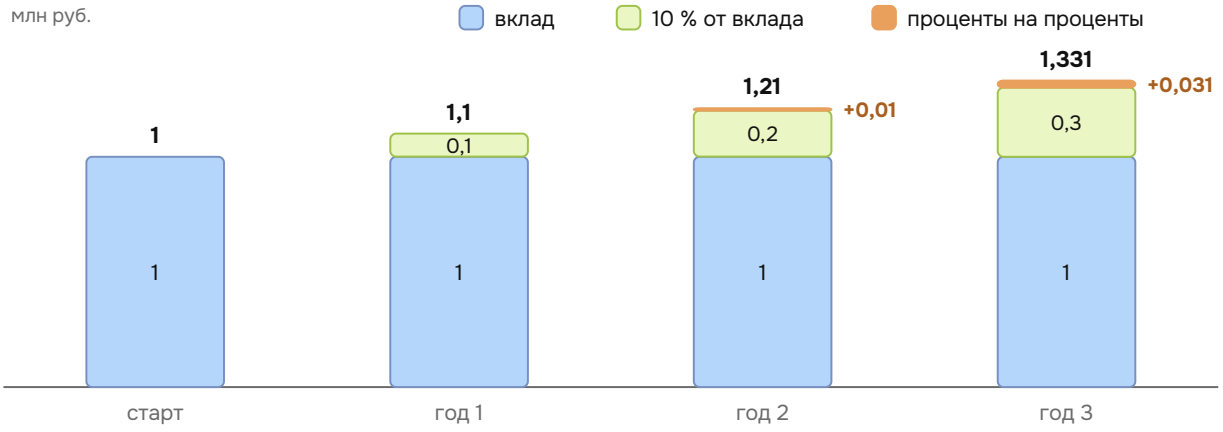
2 Вклады

Сложные проценты, пополнения и снятия

Пример 3 Три года под 10 %

Вклад 1 млн руб. положили под 10 % годовых; в конце каждого года проценты прибавляются к вкладу. Сколько будет на счёте через 3 года? Сравните со случаем, когда 10 % каждый год начисляются только на исходный 1 млн.

Год	На начало, млн	Начислено 10 %	На конец, млн	Только от 1 млн
1	1	0,1	1,1	1,1
2	1,1	0,11	1,21	1,2
3	1,21	0,121	1,331	1,3



Каждый год сумма умножается на одно и то же число 1,1: $1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}1^3 = 1{,}331$ млн. Начиная со второго года проценты начисляются и на прежние проценты — это добавка 0,031 млн (оранжевый слой).

ВЫВОД 3

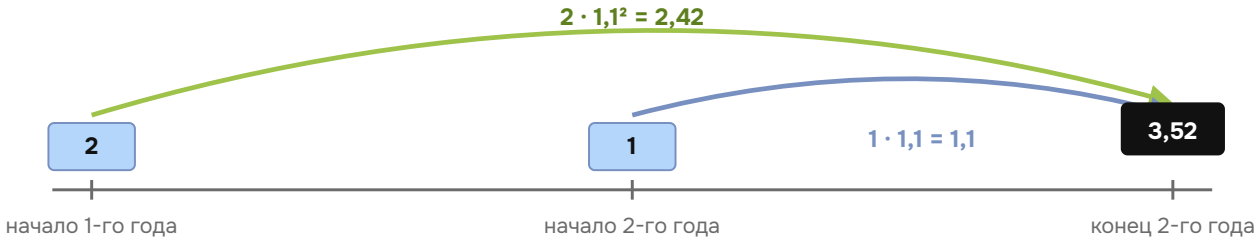
Вклад S под r % годовых через n лет: $\mathbf{S \cdot q^n}$, где $q = 1 + \frac{r}{100}$.

Если ставка меняется по годам — перемножаем разные множители: $S \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$.

Пример 4 Вклад с пополнением

Вклад 2 млн руб. под 10 % годовых. В начале второго года вкладчик добавил 1 млн руб. Сколько будет на счёте через 2 года?

Год	На начало	Пополнение	После пополнения	На конец (×1,1)
1	2	–	2	2,2
2	2,2	+1	3,2	3,52



Второй способ — проследить каждый взнос отдельно: 2 млн пролежали два года, 1 млн — один год. $2 \cdot 1{,}1^2 + 1 \cdot 1{,}1 = 2{,}42 + 1{,}1 = 3{,}52$ млн руб.

ВЫВОД 4

Итог вклада = сумма слагаемых «взнос · q^k», где k — число начислений после этого взноса.

Снятая сумма входит со знаком минус и тоже умножается на q столько раз, сколько начислений было после снятия.

Задачи

2.1 Вклад 800 тыс. руб. положили под 25 % годовых (проценты начисляются в конце года и прибавляются к вкладу). Сколько рублей будет на счёте через 2 года?

Заполните таблицу:

Год	На начало, тыс.	Начислено 25 %	На конец, тыс.
1	800		
2			

Ответ:

2.2 Вклад под 10 % годовых через 3 года вырос до 2 662 000 руб. Какую сумму (в рублях) положили?

Заполните таблицу:

Год	На начало, млн	На конец, млн
1	S	
2		
3		2,662

Ответ:

2.3 Через какое наименьшее число лет вклад под 25 % годовых увеличится более чем в 2 раза?

Ответ:

2.4 Вклад 2 млн руб. В конце первого года банк начислил 10 %, в конце второго — r %. Через 2 года на счёте 2 860 000 руб. Найдите r.

Ответ:

2.5 Вклад 1 млн руб. под 20 % годовых на 3 года. В конце первого и второго года после начисления процентов вкладчик снимает одну и ту же сумму X. В конце третьего года на счёте 1,2 млн руб. Найдите X (в рублях).

Заполните таблицу:

Год	На начало, млн	После ×1,2	Снятие	На конец, млн
1	1	1,2	X	1,2 − X
2			X	
3			—	1,2

Ответ:

2.6 Вклад 2 млн руб. на 3 года. Банк А каждый год начисляет 10 %. Банк Б в первый год ничего не начисляет, а в конце второго и третьего года — по 15 %. На сколько рублей больше получит вкладчик в более выгодном банке?

Ответ:

2.7 Вклад 1 млн руб. под 10 % годовых на 4 года. В начале второго, третьего и четвёртого года вкладчик пополняет счёт на одну и ту же сумму X млн руб. Найдите наименьшее целое X, при котором через 4 года на счёте будет не меньше 10 млн руб.

Ответ:

2.8 Вклад 4 млн руб. на 2 года под r % годовых. В начале второго года вклад пополнили на 1 млн руб. Через 2 года на счёте 6 960 000 руб. Найдите r.

Ответ:

3 Кредит равными платежами

Таблица долга и уравнение «в конце долг равен нулю»

СТАНДАРТНАЯ СХЕМА КРЕДИТА (ДАЛЬШЕ — «СТАНДАРТНАЯ СХЕМА»)

— каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года (умножается на q);

— с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом;

— после последнего платежа долг равен нулю.

Пример 5 **Два равных платежа**

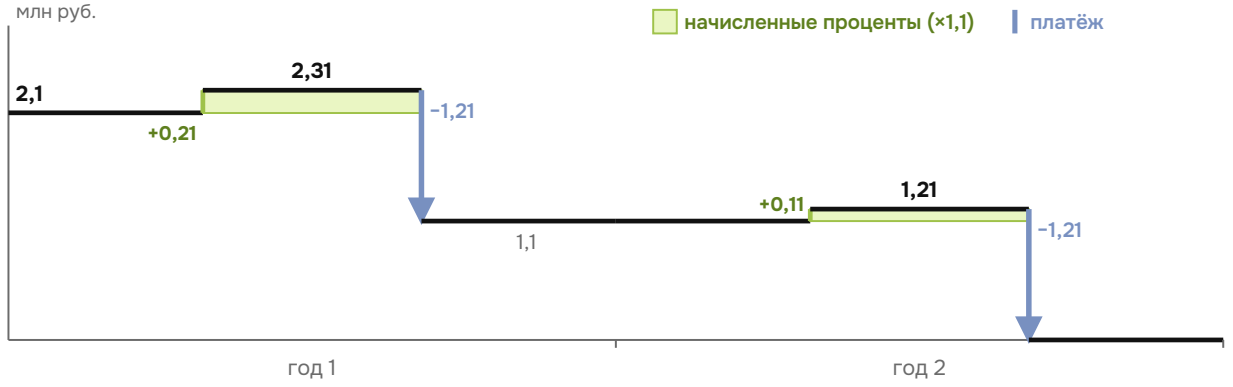
Кредит 2,1 млн руб. взят на 2 года под 10 % (стандартная схема) и погашается двумя равными платежами. Найдите платёж X.

Шаг 1. Пишем таблицу, оставляя X буквой (числа — в млн руб.):

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	2,1	2,31	X	2,31 - X
2	2,31 - X	2,541 - 1,1X	X	2,541 - 2,1X

Шаг 2. После последнего платежа долг равен нулю: 2,541 - 2,1X = 0 ⇒ X = 1,21 млн руб.

Шаг 3. Проверяем — та же таблица в числах. На графике видно, как долг каждый год подскакивает (начисление) и падает (платёж):



ВЫВОД 5

Посмотрим на последнюю строку в общем виде: (S·q - X)·q - X = 0, то есть **$S \cdot q^2 = X \cdot q + X$**.

Отсюда для двух лет: $X = \frac{S \cdot q^2}{q + 1}$. Смысл: сумма, до которой вырос бы кредит к концу срока, равна сумме платежей, каждый из которых тоже «дорос» до конца срока.

Пример 6 **Три равных платежа и второй взгляд**

Кредит 3,31 млн руб. на 3 года под 10 % (стандартная схема), три равных платежа. Найдите платёж.

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	3,31	3,641	X	3,641 - X
2	3,641 - X	4,0051 - 1,1X	X	4,0051 - 2,1X
3	4,0051 - 2,1X	4,40561 - 2,31X	X	4,40561 - 3,31X

4,40561 - 3,31X = 0 ⇒ X = 1,331 млн руб.

Второй взгляд. Сколько «сегодняшних» денег гасит каждый платёж? Платёж через k лет равен сумме, которая выросла бы из X : q^k:

Платёж	через 1 год	через 2 года	через 3 года	Сумма
гасит сегодня	1,331 : 1,1 = 1,21	1,331 : 1,21 = 1,1	1,331 : 1,331 = 1	3,31 ✓

ВЫВОД 6

Для n равных платежей: $\mathbf{S \cdot q^n = X(q^{n-1} + \ldots + q + 1)}$.

Второй вид той же связи: $\mathbf{S = \frac{X}{q} + \frac{X}{q^2} + \ldots + \frac{X}{q^n}}$. Он особенно удобен, когда платёж известен, а кредит нужно найти.

Подсказка: числа вида 3,31 = 1 + 1,1 + 1,21 в условии намекают, что платёж выйдет «круглым».

Задачи

3.1 Кредит 5,5 млн руб. взят на 2 года под 20 % (стандартная схема) и погашается двумя равными платежами. Найдите размер платежа (в рублях).

Заполните таблицу:

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	5,5		X	
2			X	0

Ответ:

3.2 Кредит взят на 2 года под 10 % (стандартная схема) и погашен двумя равными платежами по 1 210 000 руб. Найдите сумму кредита (в рублях).

Заполните таблицу:

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	S	1,1S	1,21	
2			1,21	0

Ответ:

3.3 Кредит 3,64 млн руб. на 3 года под 20 % (стандартная схема) погашается тремя равными платежами. Найдите платёж (в рублях).

Заполните таблицу:

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	3,64		X	
2			X	
3			X	0

Ответ:

3.4 Кредит 4,641 млн руб. на 4 года под 10 % (стандартная схема) погашается четырьмя равными платежами. Найдите платёж (в рублях).

Ответ:

3.5 Кредит 2,2 млн руб. погашен двумя равными платежами по 1 440 000 руб. (стандартная схема, ставка r %). Найдите r.

Ответ:

3.6 Кредит 6,3 млн руб. на 2 года под 10 % (стандартная схема), два равных платежа. Найдите переплату по кредиту (сумма выплат минус кредит) в рублях.

Ответ:

3.7 Кредит 2,5 млн руб. на 2 года погашается двумя равными платежами. В первый январь долг вырос на 10 %, во второй — на 20 %. Найдите платёж (в рублях).

Ответ:

3.8 Кредит на 3 года под 20 % (стандартная схема) погашается тремя равными платежами, каждый не больше 2 592 000 руб. Найдите наибольшую возможную сумму кредита (в рублях).

Ответ:

3.9 В июле 2020 года взяли кредит 419 375 руб. Каждый январь долг увеличивается на 20 %, с февраля по июнь выплачивается часть долга одним платежом. Кредит погашен четырьмя равными платежами. Сколько рублей выплачено банку? (ЕГЭ 2024)

Ответ:

4 Долг уменьшается равномерно

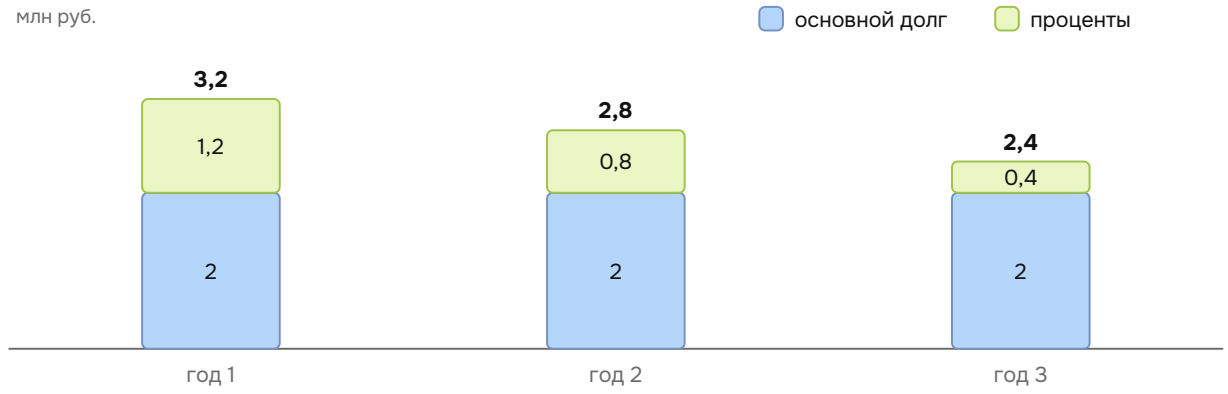
Дифференцированные платежи: платёж = часть долга + проценты

Пример 7 **Таблица дифференцированного кредита**

Кредит 6 млн руб. на 3 года под 20 % (стандартная схема); каждый июль долг уменьшается на одну и ту же величину. Найдите все платежи и общую сумму выплат.

Долг падает с 6 до 0 за 3 шага по 2 млн. Каждый платёж = проценты, набежавшие в январе, + 2 млн основного долга.

Период	Долг до начисления	Проценты	Часть долга	Платёж	Долг после
1	6	1,2	2	3,2	4
2	4	0,8	2	2,8	2
3	2	0,4	2	2,4	0



Всего: 3,2 + 2,8 + 2,4 = 8,4 млн руб. Переплата 2,4 = 0,2 · (6 + 4 + 2) — 20 % от суммы долгов, на которые начислялись проценты.

ВЫВОД 7

Платёж = $\frac{S}{n}$ + проценты на текущий долг. Проценты падают равномерно, поэтому платежи убывают на одно и то же число.

Переплата = $\frac{r}{100}$ · (сумма долгов, на которые начислялись проценты).

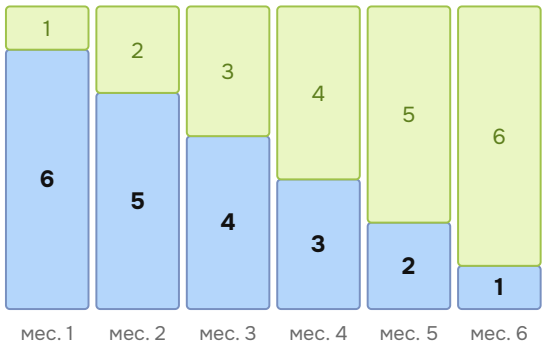
Пример 8 **Длинный срок: считаем сумму долгов**

15 января взят кредит 3 млн руб. на 18 месяцев. 1-го числа каждого месяца долг растёт на 2 %, со 2-го по 14-е вносится платёж, а 15-го числа долг на одну и ту же сумму меньше, чем 15-го числа предыдущего месяца. Найдите общую сумму выплат.

Таблица на 18 строк длинная — достаточно её начала и конца. Долг на 15-е число перед каждым начислением:

Месяц	1	2	3	…	17	18
Долг	S	$\frac{17}{18}$S	$\frac{16}{18}$S	…	$\frac{2}{18}$S	$\frac{1}{18}$S

Сумма долгов = S · (18 + 17 + … + 1) : 18. Сумму 1 + 2 + … + n находим так, как на рисунке (для n = 6):



Синие столбики — долг (в долях S/6) в начале каждого месяца: 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Зелёные — те же столбики, перевёрнутые. Вместе — прямоугольник 6 × 7, значит

6 + 5 + … + 1 = 6 · 7 : 2 = 21.

Для n месяцев: n(n + 1) : 2.

18 + 17 + … + 1 = 18 · 19 : 2 = 171. Сумма долгов = 3 · 171 : 18 = 28,5. Проценты: 0,02 · 28,5 = 0,57. Всего 3 + 0,57 = 3,57 млн руб.

ВЫВОД 8

При равномерном уменьшении долга за n периодов сумма долгов равна $S \cdot \frac{n+1}{2}$, поэтому

$$\textbf{Σ выплат} = S + \frac{r}{100} \cdot S \cdot \frac{n+1}{2}.$$

Последний платёж = (S : n) · q — последняя часть долга вместе с процентами на неё.

Задачи

4.1 Кредит 4,8 млн руб. на 4 года под 10 % (стандартная схема), долг каждый июль уменьшается на одну и ту же величину. Найдите третий платёж (в рублях).

Заполните таблицу:

Период	Долг до начисления	Проценты	Часть долга	Платёж	Долг после
1	4,8	0,48	1,2	1,68	3,6
2					
3					
4					0

Ответ:

4.2 Кредит 2,4 млн руб. на 6 месяцев: 1-го числа каждого месяца долг растёт на 1 %, со 2-го по 14-е — платёж, а 15-го числа долг на одну и ту же сумму меньше, чем в предыдущем месяце. Найдите общую сумму выплат (в рублях).

Заполните таблицу:

Период	Долг до начисления	Проценты	Часть долга	Платёж	Долг после
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Ответ:

4.3 Кредит взят на n месяцев по схеме примера 8 под 3 % в месяц. Общая сумма выплат на 30 % больше суммы кредита. Найдите n.

Ответ:

4.4 Кредит взят на 11 месяцев по схеме примера 8. Общая сумма выплат на 30 % больше суммы кредита. Найдите r.

Ответ:

4.5 Кредит взят на 20 месяцев по схеме примера 8 под 1 % в месяц. Общая сумма выплат 4 420 000 руб. Найдите сумму кредита (в рублях).

Ответ:

4.6 Кредит взят на 10 месяцев по схеме примера 8 под 5 % в месяц. Последний платёж равен 210 000 руб. Найдите сумму кредита (в рублях).

Ответ:

4.7 Кредит взят на 12 месяцев по схеме примера 8 под 2 % в месяц. Первый платёж равен 124 000 руб. Найдите общую сумму выплат (в рублях).

Ответ:

4.8 Кредит 4 млн руб. на 4 года (стандартная схема, долг уменьшается равномерно), r — целое число. Найдите наибольшее r, при котором каждый платёж не больше 2 млн руб.

Ответ:

4.9 В июле планируется взять кредит 7 млн руб. на 10 лет (стандартная схема, долг каждый июль уменьшается на одну и ту же сумму). Найдите наименьшую ставку r, если последний платёж будет не менее 0,819 млн руб.

Ответ:

5 Долг задан таблицей или схемой

Универсальный приём: проценты = r % от суммы долгов

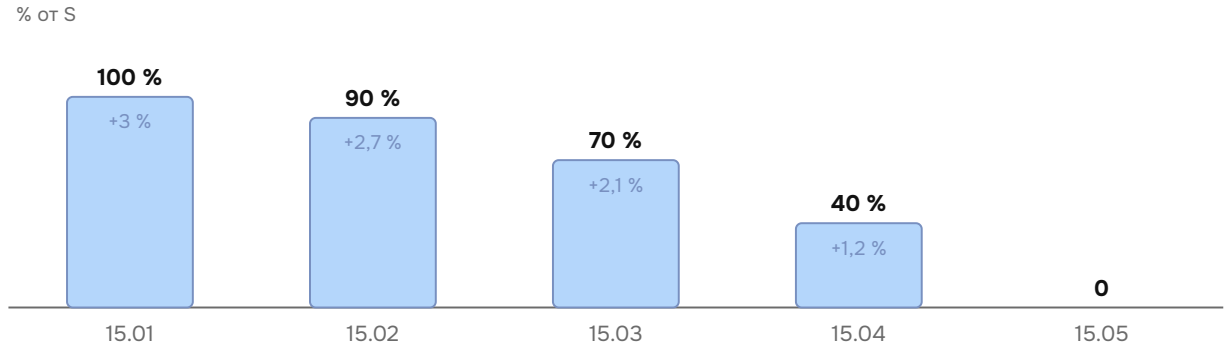
Пример 9 **Неравномерное уменьшение долга**

15 января взят кредит 2 млн руб. 1-го числа каждого месяца долг растёт на 3 %, со 2-го по 14-е вносится платёж. Долг на 15-е число задан таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05
Долг, % от кредита	100	90	70	40	0

Найдите общую сумму выплат.

Месяц	Долг до	Проценты 3 %	После начисления	Платёж	Долг после
1	2	0,06	2,06	0,26	1,8
2	1,8	0,054	1,854	0,454	1,4
3	1,4	0,042	1,442	0,642	0,8
4	0,8	0,024	0,824	0,824	0



Сумма платежей 0,26 + 0,454 + 0,642 + 0,824 = 2,18 млн. Короче: всё, что заплачено сверх 2 млн, — это проценты, 0,03 · (2 + 1,8 + 1,4 + 0,8) = 0,03 · 6 = 0,18. Итого 2,18 млн руб.

ВЫВОД 9

Для любой схемы, где ставка постоянна и долг в конце равен нулю:

$$\Sigma \text{ выплат} = S + \frac{r}{100} \cdot (D_1 + D_2 + \ldots + D_n),$$

где $D_1, \ldots, D_n$ — долги, на которые начислялись проценты. Вывод 8 — частный случай этого правила.

Пример 10 **Схема из двух этапов**

Кредит 2,2 млн руб. на 3 года под 20 % (стандартная схема). В первый год платятся только проценты, а за следующие 2 года долг гасится двумя равными платежами. Найдите общую сумму выплат.

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	2,2	2,64	0,44 (только проценты)	2,2
2	2,2	2,64	X	2,64 - X
3	2,64 - X	3,168 - 1,2X	X	3,168 - 2,2X

3,168 - 2,2X = 0 ⇒ X = 1,44. Всего 0,44 + 2 · 1,44 = 3,32 млн руб.

ВЫВОД 10

Многоэтапную схему решаем по этапам: каждый этап начинается с долга, оставшегося от предыдущего. На этапе «только проценты» долг не меняется; на этапе равных платежей работают выводы 5–6.

Задачи

5.1 Кредит S взят в июле на 3 года под 20 % (стандартная схема). Долг в июле: 2027 — 100 %, 2028 — 60 %, 2029 — 30 %, 2030 — 0 % от S. Общая сумма выплат 6,9 млн руб. Найдите S (в рублях).

Заполните таблицу:

Год	Долг до	После ×1,2	Долг после	Платёж
1	S		0,6S	
2			0,3S	
3			0	

Ответ:

5.2 Кредит 4 млн руб. на 5 лет под 20 % (стандартная схема). Первые 3 года долг каждый июль уменьшается на 10 % от суммы кредита, а за последние 2 года — равномерно до нуля. Найдите общую сумму выплат (в рублях).

Ответ:

5.3 Кредит S на 4 года под 10 % (стандартная схема). Первые 3 года платятся только проценты, а в четвёртый год долг гасится полностью. Общая сумма выплат 2,8 млн руб. Найдите S (в рублях).

Заполните таблицу:

Год	1	2	3	4
Долг до	S			
Платёж				

Ответ:

5.4 15 января взят кредит 2 млн руб. 1-го числа долг растёт на r %, со 2-го по 14-е — платёж. Долг на 15-е число (в % от кредита): 15.01 — 100, 15.02 — 95, 15.03 — 85, 15.04 — 65, 15.05 — 35, 15.06 — 0. Общая сумма выплат 2 380 000 руб. Найдите r.

Ответ:

5.5 Кредит S взят 15 января на 3 месяца, 1-го числа долг растёт на 2 %. Долг на 15-е число: 15.02 — 60 %, 15.03 — 30 %, 15.04 — 0 % от S. Последний платёж 612 000 руб. Найдите S (в рублях).

Ответ:

5.6 15 января взят кредит 1,1 млн руб. на 21 месяц под 3 % в месяц. С 1-го по 20-й месяц долг на 15-е число уменьшается на одну и ту же сумму, 15-го числа 20-го месяца он равен 300 тыс. руб., к 15-му числу 21-го месяца кредит погашен. Найдите общую сумму выплат (в рублях).

Ответ:

5.7 Кредит 4 млн руб. на 3 года под 20 % (стандартная схема). Каждый июль долг вдвое меньше прошлогоднего, а в третий год гасится полностью. Найдите общую сумму выплат (в рублях).

Ответ:

5.8 Льготный кредит на целое число миллионов рублей на 4 года. В середине каждого года долг возрастает на 20 %. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик платит только проценты, в конце 3-го и 4-го — одинаковые суммы, погашая долг полностью. Найдите наименьший размер кредита (в млн руб.), при котором общая сумма выплат превысит 8 млн руб.

Ответ:

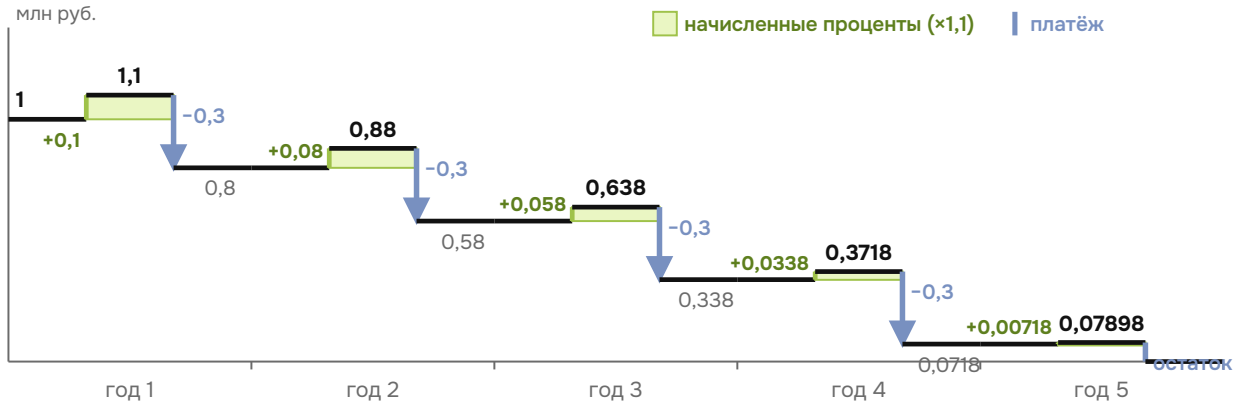
6 Нестандартные и обратные задачи

Неизвестны ставка, срок или сумма; платежи разного размера

Пример 11 Сколько лет платить?

Кредит 1 млн руб. под 10 % (стандартная схема). Каждый год платится 300 тыс. руб., последний платёж может быть меньше и гасит остаток. За сколько лет будет погашен кредит?

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	1	1,1	0,3	0,8
2	0,8	0,88	0,3	0,58
3	0,58	0,638	0,3	0,338
4	0,338	0,3718	0,3	0,0718
5	0,0718	0,07898	0,07898	0



На пятый год остаток 0,07898 меньше 0,3 — он гасится последним платежом. Ответ: 5 лет.

ВЫВОД 11

Если платёж задан, а срок неизвестен, ведём таблицу год за годом, пока долг после начисления не станет меньше платежа.

Проверка смысла: платёж должен быть больше процентов первого года (0,3 > 0,1), иначе долг не уменьшается.

Пример 12 Платежи разного размера

Кредит 4 млн руб. на 2 года под 20 % (стандартная схема). Второй платёж в 2 раза больше первого. Найдите общую сумму выплат.

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	4	4,8	X	4,8 - X
2	4,8 - X	5,76 - 1,2X	2X	5,76 - 3,2X

5,76 - 3,2X = 0 ⇒ X = 1,8; второй платёж 3,6. Всего 5,4 млн руб.

ВЫВОД 12

Платежи разного размера выражаем через одну переменную и пишем ту же таблицу. Главное уравнение прежнее: долг после последнего платежа равен нулю.

Задачи

6.1 Кредит 4,31 млн руб. на 3 года под 10 % (стандартная схема). Первые два платежа равны X, третий равен 2X. Найдите общую сумму выплат (в рублях).

Заполните таблицу:

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	4,31		X	
2			X	
3			2X	0

Ответ:

6.2 Кредит 2 млн руб. на 2 года (стандартная схема, ставка r %). После первого платежа долг равен 1,2 млн руб., второй платёж гасит долг. Общая сумма выплат 2 640 000 руб. Найдите r.

Ответ:

6.3 Кредит на 2 года под 10 % (стандартная схема) гасится двумя равными платежами, каждый не больше 5 млн руб. Найдите наибольшую сумму кредита, равную целому числу миллионов рублей (ответ в млн руб.).

Ответ:

6.4 Кредит 3,31 млн руб. на 3 года под 10 %. Вариант 1: долг уменьшается равномерно. Вариант 2: три равных платежа. На сколько рублей вариант 1 выгоднее?

Ответ:

6.5 Кредит взят на 2 года под 25 % (стандартная схема). Первый платёж 1,5 млн руб., второй 2,5 млн руб. — кредит погашен. Найдите сумму кредита (в рублях).

Ответ:

★ **6.6** 15 января взят кредит на 24 месяца по схеме примера 8 под 2 % в месяц. За первые 12 месяцев выплачено 822 000 руб. Найдите сумму кредита (в рублях).

Ответ:

★ **6.7** Кредит 3 млн руб. под 10 % (стандартная схема) гасится равными ежегодными платежами, каждый не больше 1 млн руб. Срок — целое число лет. Найдите наименьший срок.

Ответ:

★ **6.8** Кредит 1 млн руб. на 5 лет (стандартная схема, долг уменьшается равномерно), r — целое. Найдите наименьшее r, при котором общая сумма выплат больше 1,5 млн руб.

Ответ:

★ **6.9** Вклад под 10 % годовых. В конце каждого из трёх лет после начисления процентов вкладчик снимает 1 млн руб. Найдите наименьший начальный вклад (целое число млн), при котором после третьего снятия на счёте останется не меньше 10 млн руб.

Ответ:

7 Оптимизация

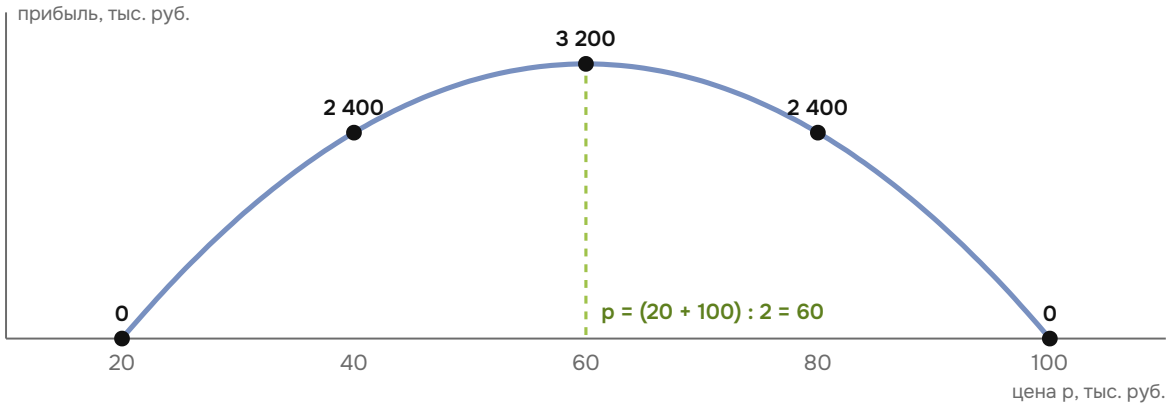
Наибольшая прибыль и наименьшие затраты

Пример 13 **Наибольшая прибыль**

Фирма продаёт товар по цене p тыс. руб. и продаёт за месяц (200 − 2p) штук. Себестоимость единицы — 20 тыс. руб. Найдите наибольшую месячную прибыль.

Прибыль = (прибыль с одной штуки) × (число штук) = (p − 20)(200 − 2p). Посчитаем для нескольких цен:

p	20	40	60	80	100
p − 20	0	20	40	60	80
200 − 2p	160	120	80	40	0
Прибыль	0	2400	3200	2400	0



Значения симметричны: прибыль равна нулю при p = 20 и p = 100, а наибольшая — ровно посередине, при p = 60: 40 · 80 = 3200 тыс. руб.

ВЫВОД 13

Произведение (p − a)(b − p) наибольшее при $p = \frac{a + b}{2}$ — посередине между корнями (вершина параболы).

Если цель — линейная функция при линейных ограничениях, проверяем угловые точки области.

Задачи

7.1 Товар продают по цене p тыс. руб., за месяц продают (300 − 3p) штук, себестоимость единицы 40 тыс. руб. Найдите наибольшую месячную прибыль (в тыс. руб.).

Заполните таблицу:

p	40	55	70	85	100
p − 40					
300 − 3p					
Прибыль					

Ответ:

7.2 Мастерская делает стулья и столы. Стул: 2 ч работы и 1 м доски, прибыль 1 тыс. руб. Стол: 3 ч и 4 м доски, прибыль 2 тыс. руб. Доступно 120 ч и 120 м доски. Найдите наибольшую прибыль (в тыс. руб.).

Ответ:

7.3 Картина стоит 900 тыс. руб., её цена каждый год растёт на 200 тыс. руб. Банк даёт 10 % годовых. Через сколько лет выгоднее всего продать картину и положить деньги в банк?

Ответ:

7.4 Расход на перевозку за час пути равен $(0{,}25v^2 + 2500)$ руб., где v — скорость в км/ч. Найдите скорость, при которой расход на 300 км пути наименьший.

Ответ:

7.5 Нужно выпустить 60 изделий на двух заводах: если на заводе трудятся t^2 часов, выпускается t изделий. Час на первом заводе стоит 200 руб., на втором — 300 руб. Найдите наименьшие затраты на оплату труда (в рублях).

Ответ:

★ **7.6** На каждом из двух заводов при t^2 часах работы выпускается t изделий. Час на первом заводе стоит 500 руб., на втором — 300 руб. Бюджет 1 200 000 руб. в неделю. Какое наибольшее число изделий можно выпустить?

Ответ:

Пробник в формате №13

8 задач без подсказок · время — 25 минут

Решайте как на экзамене: таблица на черновике, в бланк — только число в единицах из вопроса.

Т1 Зарплата 95 000 руб. до вычета НДФЛ 13 %. Пятую часть суммы на руки семья откладывает. Сколько рублей в месяц откладывает семья?

Ответ:

Т2 Вклад 500 000 руб. под 8 % годовых на 2 года. В начале второго года вклад пополнили на 100 000 руб. Сколько рублей будет на счёте через 2 года?

Ответ:

Т3 Кредит 1,1 млн руб. на 2 года под 20 % (стандартная схема) погашается двумя равными платежами. Сколько рублей составит общая сумма выплат?

Ответ:

Т4 Кредит 9 млн руб. на 3 года под 10 % (стандартная схема), долг каждый июль уменьшается на одну и ту же величину. Найдите общую сумму выплат (в рублях).

Ответ:

Т5 Кредит на 24 месяца по схеме примера 8 под 1 % в месяц. Общая сумма выплат 2 250 000 руб. Найдите сумму кредита (в рублях).

Ответ:

Т6 Кредит 4 млн руб. на 3 года под 10 % (стандартная схема). Первые два года платятся только проценты, в третий год долг гасится полностью. Найдите общую сумму выплат (в рублях).

Ответ:

Т7 Через какое наименьшее число лет вклад под 10 % годовых вырастет более чем на 60 %?

Ответ:

Т8 Кредит на 2 года под 10 % (стандартная схема). Первый платёж 1,1 млн руб., второй 1,21 млн руб. — кредит погашен. Найдите сумму кредита (в рублях).

Ответ:

Что мы вывели

Все правила этой тетради — со ссылкой на пример, из решения которого они получены.

№	Вывод	Откуда
1	Рост на r % — умножение на $1 + \frac{r}{100}$; снижение — на $1 - \frac{r}{100}$; цепочка изменений — произведение множителей.	пример 1
2	Известен результат — делим на множитель: $x = \frac{\text{результат}}{\text{множитель}}$.	пример 2
3	Вклад через n лет: $S \cdot q^n$; при разных ставках — $S \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots$	пример 3
4	Каждый взнос растёт отдельно: Σ (взнос $\cdot q^k$); снятие — со знаком минус.	пример 4
5	Два равных платежа: $S \cdot q^2 = X \cdot q + X$, $X = \frac{S \cdot q^2}{q + 1}$.	пример 5
6	n равных платежей: $S \cdot q^n = X(q^{n-1} + \ldots + q + 1)$, или $S = \frac{X}{q} + \frac{X}{q^2} + \ldots + \frac{X}{q^n}$.	пример 6
7	Равномерное уменьшение: платёж = $\frac{S}{n}$ + проценты на текущий долг; переплата = $\frac{r}{100} \cdot$ (сумма долгов).	пример 7
8	$\Sigma = S + \frac{r}{100} \cdot S \cdot \frac{n+1}{2}$; последний платёж = $\frac{S}{n} \cdot q$.	пример 8
9	Любая схема с постоянной ставкой: $\Sigma = S + \frac{r}{100} \cdot (D_1 + D_2 + \ldots + D_n)$.	пример 9
10	Многоэтапную схему решаем по этапам, долг переходит из этапа в этап.	пример 10
11	Срок неизвестен — ведём таблицу год за годом.	пример 11
12	Разные платежи — через одну переменную; долг в конце равен нулю.	пример 12
13	$(p - a)(b - p)$ наибольшее при $p = \frac{a+b}{2}$.	пример 13

✓ Ответы

в тех единицах, которые спрашиваются в задаче

№	Ответ
1.1	56 550
1.2	60 000
1.3	4800
1.4	20
1.5	180
1.6	300
1.7	12,5
1.8	35
1.9	6,4
2.1	1 250 000
2.2	2 000 000
2.3	4
2.4	30
2.5	200 000
2.6	17 000
2.7	3
2.8	20

№	Ответ
3.1	3 600 000
3.2	2 100 000
3.3	1 728 000
3.4	1 464 100
3.5	20
3.6	960 000
3.7	1 500 000
3.8	5 460 000
3.9	648 000
4.1	1 440 000
4.2	2 484 000
4.3	19
4.4	5
4.5	4 000 000
4.6	2 000 000
4.7	1 356 000
4.8	25

№	Ответ
4.9	17
5.1	5 000 000
5.2	7 000 000
5.3	2 000 000
5.4	5
5.5	2 000 000
5.6	1 541 000
5.7	5 400 000
5.8	5
6.1	5 324 000
6.2	20
6.3	8
6.4	21 000
6.5	2 800 000
★6.6	1 200 000
★6.7	4
★6.8	17

№	Ответ
★6.9	10
7.1	2700
7.2	72
7.3	6
7.4	100
7.5	432 000
★7.6	80
T1	16 530
T2	691 200
T3	1 440 000
T4	10 800 000
T5	2 000 000
T6	5 200 000
T7	5
T8	2 000 000

Подробные решения

Числа в таблицах — в млн руб., если не сказано иное. q — множитель роста долга.

Модуль 1. Проценты — это умножение

1.1

56 550

Удерживают 13 %, остаётся 87 % ⇒ множитель 0,87.

Было	Множитель	Стало
65 000	0,87	65 000 · 0,87 = 56 550

1.2

60 000

$x \cdot 0{,}87 = 52\,200 \Rightarrow x = 52\,200 : 0{,}87 = 60\,000$. Проверка: $60\,000 \cdot 0{,}87 = 52\,200$.

1.3

4800

Шаг	Было	Множитель	Стало
весна	5000	1,2	6000
осень	6000	0,8	4800

$5000 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 5000 \cdot 0{,}96 = 4800$.

1.4 **20**

Было 1, стало 1,25. Ищем множитель k: 1,25 · k = 1 ⇒ k = 1 : 1,25 = 0,8 = 1 − 0,2 ⇒ снизить на 20 %.

Проверка на числах: 100 → 125 → 125 · 0,8 = 100.

1.5 **180**

Ночью 300 · 0,4 = 120 кВт·ч, днём 180 кВт·ч.

Тариф	Расчёт	Сумма, руб.
однотарифный	300 · 6	1800
двухтарифный	180 · 7 + 120 · 3	1620

Разница 1800 − 1620 = 180 руб.

1.6 **300**

Карта	Расчёт выгоды	Итого, руб.
А	20 000 · 0,05 + 15 000 · 0,01 − 150 = 1000 + 150 − 150	1000
Б	35 000 · 0,02	700

Выгоднее карта А, разница 1000 − 700 = 300 руб.

1.7 **12,5**

Деньги: 1 → 1,17. Цена товара: 1 → 1,04. Количество товара: 1,17 : 1,04 = 1,125 ⇒ на 12,5 % больше.

Разность 17 − 4 = 13 даёт только приближённое значение; в ответ она не годится.

1.8 **35**

1 · 0,8 · q = 1,08 ⇒ q = 1,08 : 0,8 = 1,35 ⇒ r = 35.

1.9 **6,4**

	Было	Множитель	Стало
ЖКХ	9000	1,12	10 080
доход	150 000	1,05	157 500

10 080 : 157 500 = 0,064 = 6,4 %.

Модуль 2. Вклады

2.1 **1 250 000**

Год	На начало, тыс.	Начислено 25 %	На конец, тыс.
1	800	200	1000
2	1000	250	1250

Одной строкой: 800 · 1,25² = 800 · 1,5625 = 1250 тыс. руб.

2.2 **2 000 000**

Год	На начало	На конец
1	S	1,1S
2	1,1S	1,21S
3	1,21S	1,331S

1,331S = 2,662 ⇒ S = 2 млн руб.

2.3 **4**

n	1	2	3	4
$1{,}25^n$	1,25	1,5625	1,953125	2,44140625

Впервые больше 2 при n = 4.

2.4 **30**

Год	На начало	Множитель	На конец
1	2	1,1	2,2
2	2,2	q	2,2q = 2,86

q = 2,86 : 2,2 = 1,3 ⇒ r = 30.

2.5 **200 000**

Год	На начало	После ×1,2	Снятие	На конец
1	1	1,2	X	1,2 − X
2	1,2 − X	1,44 − 1,2X	X	1,44 − 2,2X
3	1,44 − 2,2X	1,728 − 2,64X	–	1,728 − 2,64X

1,728 − 2,64X = 1,2 ⇒ 2,64X = 0,528 ⇒ X = 0,2 млн руб.

2.6 **17 000**

Банк	Расчёт	Через 3 года, млн
А	$2 \cdot 1{,}1^3$	2,662
Б	$2 \cdot 1 \cdot 1{,}15^2$	2,645

Выгоднее банк А, разница 2,662 − 2,645 = 0,017 млн = 17 000 руб.

2.7 **3**

По выводу 4: исходный 1 млн пролежит 4 года, пополнения — 3, 2 и 1 год.

$1{,}1^4 + X(1{,}1^3 + 1{,}1^2 + 1{,}1) = 1{,}4641 + 3{,}641X \geq 10 \Rightarrow X \geq 8{,}5359 : 3{,}641 \approx 2{,}34 \Rightarrow$ наименьшее целое X = 3.

2.8 **20**

$(4q + 1) \cdot q = 6{,}96 \Rightarrow 4q^2 + q - 6{,}96 = 0$; $D = 1 + 111{,}36 = 112{,}36 = 10{,}6^2$; $q = (-1 + 10{,}6) : 8 = 1{,}2 \Rightarrow r = 20$.

Проверка: $4 \cdot 1{,}2 = 4{,}8$; $4{,}8 + 1 = 5{,}8$; $5{,}8 \cdot 1{,}2 = 6{,}96$. ✓

Модуль 3. Кредит равными платежами

3.1

3 600 000

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	5,5	6,6	X	6,6 − X
2	6,6 − X	7,92 − 1,2X	X	7,92 − 2,2X

7,92 − 2,2X = 0 ⇒ X = 3,6 млн руб. Проверка по выводу 5: 5,5 · 1,44 : 2,2 = 3,6. ✓

3.2

2 100 000

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	S	1,1S	1,21	1,1S − 1,21
2	1,1S − 1,21	1,21S − 1,331	1,21	1,21S − 2,541

1,21S − 2,541 = 0 ⇒ S = 2,1 млн. Вторым взглядом: S = 1,21 : 1,1 + 1,21 : 1,21 = 1,1 + 1 = 2,1. ✓

3.3

1 728 000

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	3,64	4,368	X	4,368 − X
2	4,368 − X	5,2416 − 1,2X	X	5,2416 − 2,2X
3	5,2416 − 2,2X	6,28992 − 2,64X	X	6,28992 − 3,64X

6,28992 − 3,64X = 0 ⇒ X = 1,728 млн руб. (Заметим: 3,64 = 1,44 + 1,2 + 1.)

3.4

1 464 100

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	4,641	5,1051	X	5,1051 − X
2	5,1051 − X	5,61561 − 1,1X	X	5,61561 − 2,1X
3	5,61561 − 2,1X	6,177171 − 2,31X	X	6,177171 − 3,31X
4	6,177171 − 3,31X	6,7948881 − 3,641X	X	6,7948881 − 4,641X

4,641 · 1,4641 = X(1,331 + 1,21 + 1,1 + 1) = 4,641X ⇒ X = 1,4641 млн руб.

3.5

20

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	2,2	2,2q	1,44	2,2q − 1,44
2	2,2q − 1,44	2,2q² − 1,44q	1,44	2,2q² − 1,44q − 1,44

2,2q² − 1,44q − 1,44 = 0 | · 25: 55q² − 36q − 36 = 0; D = 1296 + 7920 = 9216 = 96²; q = (36 + 96) : 110 = 1,2 ⇒ r = 20.

Проверка: 2,2 · 1,2 = 2,64; 2,64 − 1,44 = 1,2; 1,2 · 1,2 = 1,44; 1,44 − 1,44 = 0. ✓

3.6

960 000

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	6,3	6,93	X	6,93 − X
2	6,93 − X	7,623 − 1,1X	X	7,623 − 2,1X

7,623 − 2,1X = 0 ⇒ X = 3,63. Выплаты 2 · 3,63 = 7,26 млн; переплата 7,26 − 6,3 = 0,96 млн руб.

3.7 **1 500 000**

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	2,5	2,75	X	2,75 − X
2	2,75 − X	3,3 − 1,2X	X	3,3 − 2,2X

3,3 − 2,2X = 0 ⇒ X = 1,5 млн руб. Таблица работает и при разных ставках — множители просто разные.

3.8 **5 460 000**

Чем больше платёж, тем больше кредит, поэтому берём X = 2,592. По выводу 6 (второй взгляд):

Платёж	через 1 год	через 2 года	через 3 года	S
$X : q^k$	2,592 : 1,2 = 2,16	2,592 : 1,44 = 1,8	2,592 : 1,728 = 1,5	5,46

3.9 **648 000**

Здесь удобен второй взгляд: $1 : 1{,}2 = \frac{5}{6}$.

$419\,375 = X\left(\frac{5}{6} + \frac{25}{36} + \frac{125}{216} + \frac{625}{1296}\right) = X \cdot \frac{3355}{1296}$.

X = 419 375 · 1296 : 3355 = 125 · 1296 = 162 000 руб. Всего выплачено 4 · 162 000 = 648 000 руб.

Модуль 4. Долг уменьшается равномерно

4.1 **1 440 000**

Период	Долг до начисления	Проценты	Часть долга	Платёж	Долг после
1	4,8	0,48	1,2	1,68	3,6
2	3,6	0,36	1,2	1,56	2,4
3	2,4	0,24	1,2	1,44	1,2
4	1,2	0,12	1,2	1,32	0

Третий платёж: 1,2 + 0,24 = 1,44 млн руб. Платежи убывают на 0,12 = 10 % от 1,2.

4.2 **2 484 000**

Период	Долг до начисления	Проценты	Часть долга	Платёж	Долг после
1	2,4	0,024	0,4	0,424	2
2	2	0,02	0,4	0,42	1,6
3	1,6	0,016	0,4	0,416	1,2
4	1,2	0,012	0,4	0,412	0,8
5	0,8	0,008	0,4	0,408	0,4
6	0,4	0,004	0,4	0,404	0

Сумма платежей 2,484 млн. По выводу 8: 2,4 · (1 + 0,01 · 7 : 2) = 2,4 · 1,035 = 2,484. ✓

4.3 **19**

Переплата $0{,}3S = 0{,}03 \cdot S \cdot \frac{n+1}{2} \Rightarrow n + 1 = 20 \Rightarrow n = 19$.

4.4 **5**

$0{,}3S = \frac{r}{100} \cdot S \cdot \frac{12}{2} \Rightarrow 0{,}3 = 0{,}06r \Rightarrow r = 5$.

4.5 **4 000 000**

$\Sigma = S(1 + 0{,}01 \cdot \frac{21}{2}) = 1{,}105S = 4{,}42 \Rightarrow S = 4$ млн руб.

4.6 **2 000 000**

Период	Долг до начисления	Проценты	Часть долга	Платёж	Долг после
…	…	…	…	…	…
9	0,2S	0,01S	0,1S	0,11S	0,1S
10	0,1S	0,005S	0,1S	0,105S	0

Последний платёж $0{,}105S = 0{,}21 \Rightarrow S = 2$ млн руб.

4.7 **1 356 000**

Первый платёж $= \frac{S}{12} + 0{,}02S = S(\frac{1}{12} + \frac{1}{50}) = \frac{31S}{300} = 0{,}124 \Rightarrow S = 1{,}2$ млн.

$\Sigma = 1{,}2 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot \frac{13}{2}) = 1{,}2 \cdot 1{,}13 = 1{,}356$ млн руб.

4.8 **25**

Платежи убывают, наибольший — первый: $1 + 4 \cdot r : 100 \le 2 \Rightarrow 0{,}04r \le 1 \Rightarrow r \le 25$.

4.9 **17**

Период	Долг до начисления	Проценты	Часть долга	Платёж	Долг после
…	…	…	…	…	…
10	0,7	$0{,}7 \cdot \frac{r}{100}$	0,7	0,7q	0

$0{,}7q \ge 0{,}819 \Rightarrow q \ge 1{,}17 \Rightarrow$ наименьшее $r = 17$.

Модуль 5. Долг задан таблицей или схемой

5.1 **5 000 000**

Год	Долг до	После ×1,2	Долг после	Платёж
1	S	1,2S	0,6S	0,6S
2	0,6S	0,72S	0,3S	0,42S
3	0,3S	0,36S	0	0,36S

$\Sigma = 1{,}38S = 6{,}9 \Rightarrow S = 5$ млн. По выводу 9: $S + 0{,}2(S + 0{,}6S + 0{,}3S) = 1{,}38S$. ✓

5.2 **7 000 000**

Год	1	2	3	4	5
Долг до начисления	S	0,9S	0,8S	0,7S	0,35S

Сумма долгов $3{,}75S$. $\Sigma = 4 \cdot (1 + 0{,}2 \cdot 3{,}75) = 4 \cdot 1{,}75 = 7$ млн руб.

5.3 **2 000 000**

Год	1	2	3	4
Платёж	0,1S	0,1S	0,1S	1,1S

$\Sigma = 1{,}4S = 2{,}8 \Rightarrow S = 2$ млн руб.

5.4 **5**

Месяц	1	2	3	4	5	Сумма
Долг до начисления, млн	2	1,9	1,7	1,3	0,7	7,6

По выводу 9: $2 + \frac{r}{100} \cdot 7{,}6 = 2{,}38 \Rightarrow 0{,}076r = 0{,}38 \Rightarrow r = 5$.

5.5 **2 000 000**

Месяц	Долг до	После ×1,02	Долг после	Платёж
1	S	1,02S	0,6S	0,42S
2	0,6S	0,612S	0,3S	0,312S
3	0,3S	0,306S	0	0,306S

$0{,}306S = 0{,}612 \Rightarrow S = 2$ млн руб.

5.6 **1 541 000**

Шаг уменьшения (1,1 − 0,3) : 20 = 0,04. Долги под проценты: 1,1; 1,06; ...; 0,34 (20 чисел) и 0,3 в 21-м месяце.

Сумма: 20 · (1,1 + 0,34) : 2 + 0,3 = 14,4 + 0,3 = 14,7. Проценты 0,03 · 14,7 = 0,441. Σ = 1,1 + 0,441 = 1,541 млн руб.

5.7 **5 400 000**

Год	Долг до	После ×1,2	Долг после	Платёж
1	4	4,8	2	2,8
2	2	2,4	1	1,4
3	1	1,2	0	1,2

Σ = 2,8 + 1,4 + 1,2 = 5,4 млн руб. По выводу 9: 4 + 0,2 · (4 + 2 + 1) = 5,4. ✓

5.8 **5**

Годы 1–2: по 0,2S. Годы 3–4 — два равных платежа по выводу 5: $X = \frac{S \cdot 1{,}44}{2{,}2} = \frac{36S}{55}$.

$\Sigma = 0{,}4S + \frac{72S}{55} = \frac{94S}{55} > 8 \Rightarrow S > \frac{440}{94} \approx 4{,}68 \Rightarrow S = 5$.

Модуль 6. Нестандартные и обратные задачи

6.1 **5 324 000**

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	4,31	4,741	X	4,741 − X
2	4,741 − X	5,2151 − 1,1X	X	5,2151 − 2,1X
3	5,2151 − 2,1X	5,73661 − 2,31X	2X	5,73661 − 4,31X

$5{,}73661 - 4{,}31X = 0 \Rightarrow X = 1{,}331$. Всего 4X = 5,324 млн руб.

6.2

20

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	2	2q	2q − 1,2	1,2
2	1,2	1,2q	1,2q	0

$(2q - 1{,}2) + 1{,}2q = 2{,}64 \Rightarrow 3{,}2q = 3{,}84 \Rightarrow q = 1{,}2 \Rightarrow r = 20$.

6.3

8

По выводу 5: $X = \frac{1{,}21S}{2{,}1} \le 5 \Rightarrow S \le \frac{10{,}5}{1{,}21} \approx 8{,}68 \Rightarrow$ наибольшее целое $S = 8$.

S, млн	$X = \frac{1{,}21S}{2{,}1}$	X ≤ 5?
8	≈ 4,61	да
9	≈ 5,19	нет

6.4

21 000

Вариант	Расчёт	Σ выплат, млн
1	$3{,}31 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot \frac{4}{2}) = 3{,}31 \cdot 1{,}2$	3,972
2	X = 1,331 (пример 6), 3 · 1,331	3,993

Разница 3,993 − 3,972 = 0,021 млн = 21 000 руб. Равномерное погашение дешевле, потому что долг в среднем меньше.

6.5

2 800 000

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	S	1,25S	1,5	1,25S − 1,5
2	1,25S − 1,5	1,5625S − 1,875	2,5	1,5625S − 4,375

$1{,}5625S = 4{,}375 \Rightarrow S = 2{,}8$ млн. Вторым взглядом: 1,5 : 1,25 + 2,5 : 1,5625 = 1,2 + 1,6 = 2,8. ✓

★ 6.6

1 200 000

Основной долг за 12 месяцев: $12 \cdot \frac{S}{24} = 0{,}5S$. Долги под проценты: $S \cdot \frac{24 + 23 + \ldots + 13}{24} = S \cdot \frac{222}{24} = 9{,}25S$; проценты $0{,}02 \cdot 9{,}25S = 0{,}185S$.

$0{,}5S + 0{,}185S = 0{,}685S = 0{,}822 \Rightarrow S = 1{,}2$ млн руб.

★ 6.7

4

По выводу 6: $X = \frac{3 \cdot q^n \cdot 0{,}1}{q^n - 1}$. Чем длиннее срок, тем меньше платёж.

n	q^n	X, млн	X ≤ 1?
3	1,331	$3 \cdot 0{,}1331 : 0{,}331 \approx 1{,}206$	нет
4	1,4641	$3 \cdot 0{,}14641 : 0{,}4641 \approx 0{,}946$	да

★ 6.8

17

По выводу 8: $\Sigma = 1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{6}{2} = 1 + 0{,}03r > 1{,}5 \Rightarrow r > 16{,}67 \Rightarrow r = 17$.

★ 6.9 **10**

По выводу 4: $A \cdot 1{,}331 - (1{,}21 + 1{,}1 + 1) \geq 10 \Rightarrow 1{,}331A \geq 13{,}31 \Rightarrow A \geq 10$.

Модуль 7. Оптимизация

7.1 **2700**

$П = (p - 40)(300 - 3p) = 3(p - 40)(100 - p)$. Корни 40 и 100, вершина $p = 70$.

p	40	55	70	85	100
П	0	2025	2700	2025	0

7.2 **72**

x стульев, y столов: $2x + 3y \leq 120$, $x + 4y \leq 120$. Проверяем угловые точки:

Точка	(60; 0)	(0; 30)	(24; 24)
$x + 2y$	60	60	72

(24; 24) — пересечение прямых $2x + 3y = 120$ и $x + 4y = 120$. Наибольшая прибыль 72 тыс. руб.

7.3 **6**

Держим картину, пока её годовой рост (0,2 млн) больше, чем 10 % её цены в банке.

n	4	5	6	7
Цена V, млн	1,7	1,9	2,1	2,3
10 % от V	0,17	0,19	0,21	0,23
Решение	держать	держать	продать	—

7.4 **100**

Время $\frac{300}{v}$ ч, расход $= 300\left(0{,}25v + \frac{2500}{v}\right)$. Сумма двух положительных слагаемых с постоянным произведением наименьшая, когда они равны: $0{,}25v = \frac{2500}{v} \Rightarrow v^2 = 10\,000 \Rightarrow v = 100$.

v	50	80	100	125	200
$0{,}25v + \frac{2500}{v}$	62,5	51,25	50	51,25	62,5

7.5 **432 000**

x изделий на первом, $60 - x$ на втором: затраты $200x^2 + 300(60 - x)^2 = 500x^2 - 36\,000x + 1\,080\,000$.

Вершина параболы $x = 36\,000 : 1000 = 36$. Затраты $200 \cdot 1296 + 300 \cdot 576 = 259\,200 + 172\,800 = 432\,000$ руб.

★ 7.6 **80**

Пусть всего N изделий, на первом x. Затраты $500x^2 + 300(N - x)^2$ наименьшие в вершине $x = 3N : 8$ и равны $187{,}5N^2$.

$187{,}5N^2 \leq 1\,200\,000 \Rightarrow N^2 \leq 6400 \Rightarrow N \leq 80$ ($x = 30$, $y = 50$: $450\,000 + 750\,000 = 1\,200\,000$ ✓).

Пробник

T1 **16 530**

$95\,000 \cdot 0{,}87 = 82\,650$; $82\,650 \cdot 0{,}2 = 16\,530$.

Т2 **691 200**

500 000 · 1,08 = 540 000; +100 000 = 640 000; · 1,08 = 691 200.

Год	На начало	Пополнение	После пополнения	На конец (×1,08)
1	500 000	–	500 000	540 000
2	540 000	+100 000	640 000	691 200

Т3 **1 440 000**

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	1,1	1,32	X	1,32 − X
2	1,32 − X	1,584 − 1,2X	X	1,584 − 2,2X

1,584 − 2,2X = 0 ⇒ X = 0,72. Σ = 2 · 0,72 = 1,44 млн руб.

Т4 **10 800 000**

Период	Долг до начисления	Проценты	Часть долга	Платёж	Долг после
1	9	0,9	3	3,9	6
2	6	0,6	3	3,6	3
3	3	0,3	3	3,3	0

Σ = 3,9 + 3,6 + 3,3 = 10,8 млн руб.

Т5 **2 000 000**

$\Sigma = S(1 + 0{,}01 \cdot \frac{25}{2}) = 1{,}125S = 2{,}25 \Rightarrow S = 2$ млн руб.

Т6 **5 200 000**

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	4	4,4	0,4	4
2	4	4,4	0,4	4
3	4	4,4	4,4	0

Σ = 0,4 + 0,4 + 4,4 = 5,2 млн руб.

Т7 **5**

$1{,}1^4 = 1{,}4641 < 1{,}6$; $1{,}1^5 = 1{,}61051 > 1{,}6 \Rightarrow$ 5 лет.

Т8 **2 000 000**

Год	Долг до начисления	После начисления (×q)	Платёж	Долг после платежа
1	S	1,1S	1,1	1,1S − 1,1
2	1,1S − 1,1	1,21S − 1,21	1,21	1,21S − 2,42

1,21S = 2,42 ⇒ S = 2 млн руб. Вторым взглядом: 1,1 : 1,1 + 1,21 : 1,21 = 2. ✓