ЕГЭНИЙ
egeniy.ru

Рабочая тетрадь · профильная математика

Задачи с параметром

$ax = b$

$D = 0$

$y = a$

$x^2 + y^2 = R^2$

$a \in (-\infty; 2)$

С нуля до задания 19 ЕГЭ-2027: все основные типы задач, теория, разобранные примеры, ответы и решения

15 разделов

27 разобранных примеров

152 заданий

3 уровня сложности

Ученик: _____

Начато: _____

Как работать с тетрадью

Задача с параметром — это не отдельная тема, а **способ думать**: вместо одного уравнения перед вами целое семейство уравнений, и нужно понять, как ведёт себя каждое из них. Тетрадь ведёт от простейшего линейного уравнения $ax = b$ до задания 19 профильного ЕГЭ.

Порядок работы с каждым разделом

1. Прочитайте **теорию** (голубая карточка) — там всё, что нужно для раздела.
2. Разберите **примеры** (зелёные карточки): закройте решение, попробуйте сами, потом сверьтесь.
3. Решайте **задания по порядку** — сложность растёт. Решение пишите прямо в клетке под заданием.
4. Проверьте **ответ** в конце тетради. Не сошлось — сначала ищите ошибку сами, затем смотрите решение.

● ○ ○ базовый уровень ● ● ○ средний уровень ● ● ● повышенный / ЕГЭ

Три вопроса, которые нужно задавать себе в любой задаче с параметром

1. **Где «ломается» формула?** Деление на ноль, нулевой старший коэффициент, ОДЗ корней и логарифмов.
2. **Можно ли увидеть задачу на картинке?** График $y = f(x)$ и прямая $y = a$, пучок прямых, окружности на плоскости.
3. **Что происходит на границах?** Каждое граничное значение a проверяется отдельно: входит оно в ответ или нет.

В тетради 15 разделов, 27 разобранных примеров и 152 заданий. Все ответы проверены программно (перебором значений параметра).

Содержание и карта методов

№	Раздел и что в нём осваиваем	стр.
1	**Линейные уравнения с параметром** Научиться разбирать случаи: когда коэффициент при x равен нулю и когда нет.	3
2	**Линейные неравенства и системы с параметром** Помнить, что при делении на отрицательное число знак неравенства меняется.	6
3	**Квадратные уравнения с параметром** Не забывать случай, когда старший коэффициент равен нулю, и уметь работать с дискриминантом.	9
4	**Теорема Виета и расположение корней** Определять знаки корней и их положение относительно чисел, не находя сами корни.	12
5	**Квадратные неравенства: «при всех x»** Переводить условие «при всех x» на язык знака старшего коэффициента и дискриминанта.	16
6	**Дробно-рациональные уравнения с параметром** Учитывать, что корень числителя может совпасть с нулём знаменателя при некоторых a.	19
7	**Графический метод: горизонтальная прямая $y = a$** Если параметр «отделён» — строим график левой части и двигаем горизонтальную прямую.	22
8	**Пучок прямых: поворот вокруг точки** Если параметр стоит при x в линейной части — прямые проходят через одну точку и «вращаются».	25
9	**Параллельный перенос графика** Если параметр стоит «свободным слагаемым» — график или прямая сдвигается, сохраняя форму.	28
10	**Выразить параметр. Плоскость $(x;\, a)$** Перевести задачу «про корни» в задачу «про множество значений функции».	31
11	**Показательные и логарифмические уравнения с параметром** Делать замену и помнить об ограничениях на новую переменную и ОДЗ.	34
12	**Тригонометрические уравнения с параметром** Сводить к алгебраической задаче с ограничением $t \in [-1;\, 1]$.	37
13	**Симметрия и единственность решения** Использовать чётность: если x_0 — решение, то и $-x_0$ — решение.	40
14	**Системы с параметром: окружности, прямые, модули** Читать уравнения как фигуры на плоскости и считать точки их пересечения.	42
15	**Задачи формата ЕГЭ (задание 19)** Комбинировать методы и оформлять решение полностью: с обоснованием каждого граничного значения.	45
—	**Ответы**	51
—	**Решения**	56

РАЗДЕЛ 1

Линейные уравнения с параметром

01

Научиться разбирать случаи: когда коэффициент при x равен нулю и когда нет.

ТЕОРИЯ

Параметр — это буква (обычно a), которая обозначает фиксированное, но неизвестное число. «Решить уравнение с параметром» — значит для *каждого* значения a указать, какие корни имеет уравнение.

Любое линейное уравнение приводится к виду $Ax = B$, где A и B зависят от a.

Условие	Что получаем
$A \neq 0$	единственный корень $x = \dfrac{B}{A}$
$A = 0,\ B = 0$	$0 \cdot x = 0$ — **любое** x (бесконечно много корней)
$A = 0,\ B \neq 0$	$0 \cdot x = B$ — **корней нет**

> **Важно.** Главная ошибка — разделить на выражение с параметром, не проверив, что оно не равно нулю.

ПРИМЕР 1

Решите уравнение $(a-3)x = a^2 - 9$.

Коэффициент $A = a - 3$ обращается в ноль при $a = 3$.

• $a \neq 3$: делим на $a - 3$: $x = \dfrac{(a-3)(a+3)}{a-3} = a + 3$.

• $a = 3$: $0 \cdot x = 0$ — подходит любое x.

Ответ: при $a \neq 3$: $x = a + 3$; при $a = 3$: x — любое число.

ПРИМЕР 2

Решите уравнение $a^2x - a = 4x - 2$.

Собираем x слева: $(a^2 - 4)x = a - 2$, то есть $(a-2)(a+2)x = a - 2$.

• $a \neq \pm 2$: $x = \dfrac{a-2}{(a-2)(a+2)} = \dfrac{1}{a+2}$.

• $a = 2$: $0 \cdot x = 0$ — любое x.

• $a = -2$: $0 \cdot x = -4$ — корней нет.

Ответ: при $a \neq \pm 2$: $x = \dfrac{1}{a+2}$; при $a = 2$: x — любое; при $a = -2$ корней нет.

Задания раздела 1

1.1 Решите уравнение $3x = a$.

1.2 Решите уравнение $ax = 5$.

1.3 Решите уравнение $(a-2)x = 7$.

1.4 Решите уравнение $(a+1)x = a+1$.

1.5 Решите уравнение $(a-4)x = a^2 - 16$.

1.6 При каком a уравнение $2x + a = 5x - 7$ имеет корень $x = 3$?

1.7 При каких a уравнение $ax = a^2$ имеет единственный корень?

1.8 При каких a уравнение $(a^2-9)x = a+3$ не имеет корней?

1.9 При каких a уравнение $(a^2-1)x = a^2 + a$ имеет бесконечно много корней?

1.10 При каких a корень уравнения $(a+2)x=6$ положителен?

1.11 При каких a уравнение $3x-a=ax+2$ имеет отрицательный корень?

1.12 При каких a уравнение $a(x-2)=x+a$ имеет корень, больший 2?

РАЗДЕЛ 2

02 Линейные неравенства и системы с параметром

Помнить, что при делении на отрицательное число знак неравенства меняется.

ТЕОРИЯ

Неравенство приводится к виду $Ax > B$ (или $\geq,\ <,\ \leq$).

Условие	Решение неравенства $Ax > B$
$A > 0$	$x > \dfrac{B}{A}$
$A < 0$	$x < \dfrac{B}{A}$ (знак перевернулся!)
$A = 0$	$0 > B$: при $B < 0$ — любое x, при $B \geq 0$ — решений нет

Для систем полезна **числовая прямая**: отмечаем концы промежутков, зависящие от a, и смотрим, как они двигаются при изменении a.

ПРИМЕР 1

Решите неравенство $(a-1)x > a^2 - 1$.

$a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$.

• $a > 1$: делим на положительное число: $x > a + 1$.

• $a < 1$: делим на отрицательное — знак меняется: $x < a + 1$.

• $a = 1$: $0 > 0$ — неверно, решений нет.

Ответ: $a > 1$: $x \in (a+1;\ +\infty)$; $a < 1$: $x \in (-\infty;\ a+1)$; $a = 1$: решений нет.

ПРИМЕР 2

При каких a система $\begin{cases} x \geq a, \\ x \leq 5 \end{cases}$ имеет ровно три целых решения?

Решения — отрезок $[a;\ 5]$. Правый конец 5 — целое число, значит, три целых числа — это $5,\ 4,\ 3$. Число 3 должно попасть в отрезок, а 2 — нет: $2 < a \leq 3$.

Ответ: $a \in (2;\ 3]$.

Задания раздела 2

2.1 Решите неравенство $ax > 3$.

2.2 Решите неравенство $(a-2)x \le a-2$.

2.3 При каких a неравенство $(a-3)x > 2$ не имеет решений?

2.4 При каких a число $x=3$ является решением неравенства $ax-2 > a+4$?

2.5 Решите систему $\begin{cases} x > a, \\ x < 3. \end{cases}$

2.6 При каких a неравенство $(a+1)x \le a^2-1$ выполняется при всех x?

2.7 При каких a множество решений неравенства $ax > 4$ – луч $(2;\,+\infty)$?

2.8 При каких a число 5 является решением неравенства $(a-2)x < a^2-4$?

2.9 При каких a система $\begin{cases} x \ge 2, \\ x \le a \end{cases}$ имеет единственное решение?

2.10 При каких a система $\begin{cases} x > a, \\ x < 2a - 1 \end{cases}$ имеет решения?

2.11 При каких a система $\begin{cases} x > a, \\ x \leq 4 \end{cases}$ имеет ровно два целых решения?

2.12 При каких a неравенство $ax + 2 > 0$ выполняется при всех $x \in [-1;\, 2]$?

РАЗДЕЛ 3

Квадратные уравнения с параметром

03

Не забывать случай, когда старший коэффициент равен нулю, и уметь работать с дискриминантом.

ТЕОРИЯ

Уравнение $Ax^2 + Bx + C = 0$ с параметром решаем по схеме:

1. **Если A зависит от a** — отдельно разбираем $A = 0$: уравнение становится линейным!
2. При $A \neq 0$ считаем $D = B^2 - 4AC$ (или $\frac{D}{4} = k^2 - AC$ при $B = 2k$): $D > 0$ — два корня, $D = 0$ — один, $D < 0$ — корней нет.
3. Если трёхчлен **раскладывается на множители** — корни видны сразу, это лучший путь.

> **Важно.** «Единственный корень» — это **либо** $D = 0$ при $A \neq 0$, **либо** $A = 0$ (линейное уравнение с одним корнем).

ПРИМЕР 1

При каких a уравнение $ax^2 - 4x + 1 = 0$ имеет единственный корень?

• $a = 0$: $-4x + 1 = 0$, $x = \frac{1}{4}$ — один корень. Подходит!

• $a \neq 0$: квадратное уравнение, $\frac{D}{4} = 4 - a = 0 \Rightarrow a = 4$.

Ответ: $a \in \{0;\ 4\}$. (Ответ «$a = 4$» — типичная потеря балла.)

ПРИМЕР 2

Решите уравнение $x^2 - (a+1)x + a = 0$.

По теореме Виета (сумма $a + 1$, произведение a) корни: $x = 1$ и $x = a$. Значит, $x^2 - (a+1)x + a = (x - 1)(x - a)$.

Ответ: при $a \neq 1$ два корня 1 и a; при $a = 1$ один корень $x = 1$.

Задания раздела 3

3.1 При каких a уравнение $x^2 + 6x + a = 0$ имеет два различных корня?

3.2 При каких a уравнение $x^2 - ax + 4 = 0$ имеет ровно один корень?

3.3 При каких a уравнение $x^2 + 2x + a = 0$ не имеет корней?

3.4 При каком a число 2 является корнем уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$? Найдите второй корень.

3.5 При каких a уравнение $ax^2 + 2x - 1 = 0$ имеет хотя бы один корень?

3.6 При каких a уравнение $(a-2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$ имеет единственный корень?

3.7 Найдите корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$. При каких a оба корня принадлежат отрезку $[0;\,4]$?

3.8 При каких a уравнение $x^2 + (a-3)x - 3a = 0$ имеет единственный корень?

3.9 При каких a уравнение $(x-a)(x^2 - 4x + 3) = 0$ имеет ровно два различных корня?

3.10 При каких a уравнение $(a+2)x^2+6x+a-6=0$ имеет ровно один корень?

3.11 При каких a уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень?

РАЗДЕЛ 4

Теорема Виета и расположение корней

04

Определять знаки корней и их положение относительно чисел, не находя сами корни.

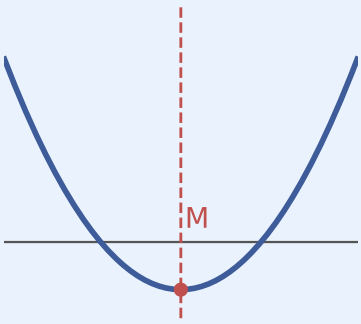
ТЕОРИЯ

Для $x^2+px+q=0$ с корнями x_1, x_2: $x_1+x_2=-p, \quad x_1x_2=q$.

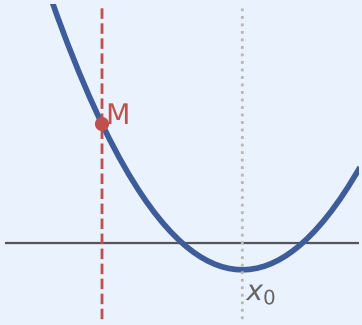
Что требуется	Условия (для $f(x)=Ax^2+Bx+C$, $A>0$)
корни разных знаков	$\dfrac{C}{A}<0$ (дискриминант проверять не нужно)
оба корня положительны	$D\geq 0,\ x_1+x_2>0,\ x_1x_2>0$
оба корня отрицательны	$D\geq 0,\ x_1+x_2<0,\ x_1x_2>0$
число M между корнями	$f(M)<0$ (при любом знаке A: $A\cdot f(M)<0$)
оба корня больше M	$D\geq 0,\ x_0>M,\ f(M)>0$, где $x_0=-\dfrac{B}{2A}$ – вершина
оба корня в интервале $(m;M)$	$D\geq 0,\ m<x_0<M,\ f(m)>0,\ f(M)>0$

Важно. Если корни должны быть **различными**, пишем $D>0$ вместо $D\geq 0$.

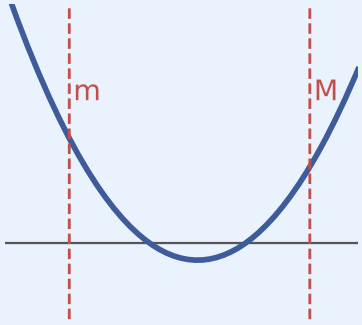
число M между корнями: $f(M)<0$



оба корня больше M: $D\geq 0,\ x_0>M,\ f(M)>0$



оба корня в $(m;M)$: $D\geq 0,\ m<x_0<M,\ f(m)>0,\ f(M)>0$



ПРИМЕР 1

При каких a уравнение $x^2-2ax+a+6=0$ имеет два различных положительных корня?

$$\begin{cases}\dfrac{D}{4}=a^2-a-6>0,\\ x_1+x_2=2a>0,\\ x_1x_2=a+6>0\end{cases}\iff\begin{cases}(a-3)(a+2)>0,\\ a>0,\\ a>-6\end{cases}\iff a>3.$$

Ответ: $a\in(3;\,+\infty)$.

ПРИМЕР 2

При каких a все корни уравнения $x^2 - 2ax + 4a - 3 = 0$ (корни есть) больше 1?

$f(x) = x^2 - 2ax + 4a - 3$, вершина $x_0 = a$.

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = a^2 - 4a + 3 = (a-1)(a-3) \geq 0, \\ x_0 = a > 1, \\ f(1) = 2a - 2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \leq 1 \text{ или } a \geq 3, \\ a > 1 \end{cases} \iff a \geq 3.$$

Ответ: $a \in [3;\, +\infty)$.

ПРИМЕР 3

При каких a число 1 лежит между корнями уравнения $x^2 + (a+1)x + a - 5 = 0$?

Ветви вверх, значит, достаточно $f(1) < 0$: $1 + a + 1 + a - 5 = 2a - 3 < 0 \Rightarrow a < \dfrac{3}{2}$. Дискриминант проверять не нужно: если $f(1) < 0$, парабола обязательно пересекает ось дважды.

Ответ: $a < \dfrac{3}{2}$.

Задания раздела 4

4.1 Не решая уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$, найдите сумму и произведение его корней.

4.2 При каких a корни уравнения $x^2 + 4x + a = 0$ имеют разные знаки?

4.3 При каких a уравнение $x^2 - 6x + a = 0$ имеет два различных положительных корня?

4.4 При каком a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 1 = 0$ наименьшая?

4.5 При каком a один корень уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ в три раза больше другого?

4.6 При каких a уравнение $x^2 + 2(a+1)x + 9 = 0$ имеет два различных отрицательных корня?

4.7 При каких a число 2 лежит между корнями уравнения $x^2 + ax + a - 7 = 0$?

4.8 При каких a число 1 лежит между корнями уравнения $(a-2)x^2 - 3x + a = 0$?

4.9 При каких a уравнение $x^2 - 2(a-1)x + a + 5 = 0$ имеет корни и все они больше 1?

4.10 При каких a уравнение $x^2 - ax + 2 = 0$ имеет корни и все они лежат в интервале $(0;\,3)$?

4.11 При каких a ровно один корень уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 9 = 0$ лежит в интервале $(0;\, 4)$?

4.12 Найдите все a, при которых корни уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{7}{4}$.

РАЗДЕЛ 5

Квадратные неравенства: «при всех x»

05

Переводить условие «при всех x» на язык знака старшего коэффициента и дискриминанта.

ТЕОРИЯ

Условие	Равносильно (при $A \neq 0$)
$Ax^2+Bx+C>0$ при всех x	$A>0,\ D<0$
$Ax^2+Bx+C\geq 0$ при всех x	$A>0,\ D\leq 0$
$Ax^2+Bx+C<0$ при всех x	$A<0,\ D<0$
неравенство $f(x)<0$ не имеет решений	то же, что $f(x)\geq 0$ при всех x

Важно. Если A содержит параметр — снова отдельно случай $A=0$!

ПРИМЕР 1

При каких a неравенство $(a-1)x^2+2(a-1)x+3>0$ верно при всех x?

• $a=1$: $3>0$ — верно всегда. Подходит.

• $a\neq 1$: нужно $a-1>0$ и $\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-3(a-1)=(a-1)(a-4)<0$, то есть $1<a<4$.

Ответ: $a\in[1;\,4)$.

ПРИМЕР 2

Решите неравенство $x^2-(a+2)x+2a<0$.

$x^2-(a+2)x+2a=(x-2)(x-a)$. Решение — интервал между корнями.

Ответ: $a<2$: $x\in(a;\,2)$; $a=2$: решений нет; $a>2$: $x\in(2;\,a)$.

Задания раздела 5

5.1 При каких a неравенство $x^2+4x+a>0$ выполняется при всех x?

5.2 При каких a неравенство $x^2-ax+9\geq 0$ выполняется при всех x?

5.3 При каких a неравенство $-x^2+2x+a<0$ выполняется при всех x?

5.4 При каких a неравенство $ax^2+4x+a>0$ выполняется при всех x?

5.5 При каких a неравенство $ax^2-6x+a\le 0$ выполняется при всех x?

5.6 При каких a неравенство $(a+1)x^2-2(a+1)x+4\ge 0$ выполняется при всех x?

5.7 При каких a неравенство $x^2-2ax+a+2<0$ не имеет решений?

5.8 При каких a функция $y=\sqrt{ax^2+2ax+4}$ определена при всех x?

5.9 При каких a неравенство $x^2-(a+2)x+2a\le 0$ имеет ровно три целых решения?

5.10 При каких a неравенство $x^2 + ax + 4 > 0$ выполняется при всех $x > 0$?

5.11 При каких a неравенство $x^2 - 2ax + 4 > 0$ выполняется при всех $x \in [1;\, 3]$?

РАЗДЕЛ 6

Дробно-рациональные уравнения с параметром

Учитывать, что корень числителя может совпасть с нулём знаменателя при некоторых a.

ТЕОРИЯ

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \iff \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Алгоритм: 1) находим корни числителя (они зависят от a); 2) выясняем, **при каких** a корень совпадает с нулём знаменателя — при этих a корень «выпадает»; 3) отдельно смотрим, когда корни числителя совпадают между собой.

> **Важно.** Для подсчёта корней удобно выписать таблицу: «корень — при каких a он посторонний — при каких a совпадает с другим».

ПРИМЕР 1

Решите уравнение $\dfrac{x-a}{x-3} = 0$.

Числитель: $x = a$. Знаменатель: $x \neq 3$. Значит, при $a = 3$ корень посторонний.

Ответ: при $a \neq 3$: $x = a$; при $a = 3$ корней нет.

ПРИМЕР 2

При каких a **уравнение** $\dfrac{x^2 - (a+2)x + 2a}{x-1} = 0$ **имеет ровно один корень?**

Числитель $= (x-2)(x-a)$, корни 2 и a; $x \neq 1$.

- Корень 2 подходит всегда.
- Корень a «выпадает» при $a = 1$ и совпадает с 2 при $a = 2$.

В обоих случаях остаётся один корень $x = 2$; при остальных a корней два.

Ответ: $a \in \{1;\ 2\}$.

Задания раздела 6

6.1 Решите уравнение $\dfrac{x-2a}{x+4} = 0$.

6.2 При каких a уравнение $\dfrac{x-a}{x-5} = 0$ не имеет корней?

6.3 При каких a уравнение $\dfrac{x+a}{x^2-4}=0$ имеет корень?

6.4 Решите уравнение $\dfrac{a}{x-1}=2$.

6.5 При каких a уравнение $\dfrac{(x-a)(x+3)}{x-2}=0$ имеет ровно один корень?

6.6 При каких a уравнение $\dfrac{x^2-5x+6}{x-a}=0$ имеет ровно один корень?

6.7 Решите уравнение $\dfrac{ax-1}{x-2}=0$.

6.8 Решите уравнение $\dfrac{x}{x-a}=2$.

6.9 При каких a уравнение $\dfrac{x^2-(a+3)x+3a}{x^2-1}=0$ имеет ровно один корень?

6.10 При каких a уравнение $\dfrac{x^2-3x+a}{x-1}=0$ имеет ровно один корень?

6.11 При каких a уравнение $\dfrac{x^2-2ax+a^2-1}{x-2}=0$ имеет ровно два корня?

6.12 При каких a уравнение $\dfrac{x^2-ax+1}{x+3}=0$ имеет ровно один корень?

РАЗДЕЛ 7

Графический метод: горизонтальная прямая $y = a$

Если параметр «отделён» — строим график левой части и двигаем горизонтальную прямую.

ТЕОРИЯ

Если уравнение можно записать как $f(x) = a$, то **число корней = число точек пересечения** графика $y = f(x)$ с горизонтальной прямой $y = a$.

Полезные преобразования графиков:

- $y = |f(x)|$ — часть графика ниже оси Ox отражаем вверх;
- $y = f(|x|)$ — оставляем часть при $x \geq 0$ и отражаем её симметрично относительно Oy;
- $y = |x - p| + |x - q|$ — «корыто»: на отрезке $[p; q]$ график горизонтален.

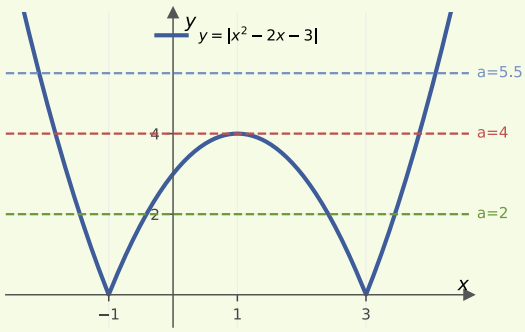
> **Важно.** Обязательно отмечайте «особые» уровни: вершины, точки излома, пересечения с осями. Именно на них меняется число корней.

ПРИМЕР 1

Определите число корней уравнения $|x^2 - 2x - 3| = a$ в зависимости от a.

Парабола $y = x^2 - 2x - 3$ имеет нули -1 и 3, вершину $(1;\ -4)$. Отражаем «провал» вверх — получаем «горб» высотой 4.

• $a < 0$: 0 корней; • $a = 0$: 2; • $0 < a < 4$: 4; • $a = 4$: 3 (касание вершины горба); • $a > 4$: 2.



Задания раздела 7

7.1 Определите число корней уравнения $|x| = a$ в зависимости от a.

7.2 При каких a уравнение $|x - 3| = a + 1$ имеет два корня?

7.3 При каких a уравнение $x^2 - 6x + 5 = a$ имеет два корня?

7.4 При каких a уравнение $|x^2 - 1| = a$ имеет ровно четыре корня?

7.5 При каких a уравнение $|x^2 - 6x + 8| = a$ имеет ровно три корня?

7.6 При каких a уравнение $x^2 - 4|x| + 3 = a$ имеет ровно четыре корня?

7.7 Определите число корней уравнения $|x - 1| + |x + 3| = a$ в зависимости от a.

7.8 При каких a уравнение $\big||x| - 2\big| = a$ имеет ровно три корня? ровно четыре?

7.9 При каких a уравнение $x|x - 4| = a$ имеет ровно три корня?

7.10 При каких a уравнение $|x+2|-|x-2|=a$ имеет ровно один корень?

7.11 При каких a уравнение $\dfrac{x^2-4}{x-2}=a$ не имеет корней?

7.12 При каких a уравнение $\left|x^2-2|x|-3\right|=a$ имеет ровно шесть корней? ровно пять?

РАЗДЕЛ 8

Пучок прямых: поворот вокруг точки

08

Если параметр стоит при x в линейной части — прямые проходят через одну точку и «вращаются».

ТЕОРИЯ

Прямая $y = a(x - x_0) + y_0$ при любом a проходит через точку $(x_0;\ y_0)$; a — её угловой коэффициент. Меняя a, мы **поворачиваем** прямую вокруг этой точки.

Схема: 1) рисуем «неподвижный» график; 2) отмечаем центр пучка; 3) ищем **граничные** положения прямой: через «углы» графика, параллельно его лучам, касание (через $D = 0$).

> **Важно.** Касание прямой и параболы: приравниваем, получаем квадратное уравнение и требуем $D = 0$. Затем проверяем, что точка касания лежит на нужной части графика.

ПРИМЕР 1

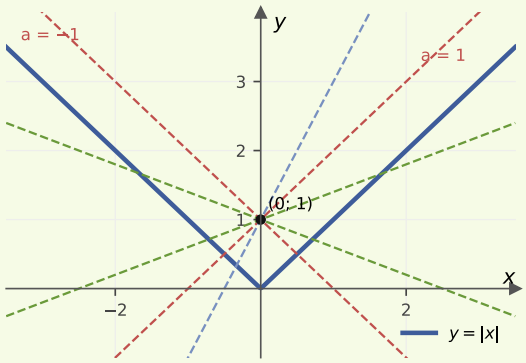
Определите число корней уравнения $|x| = ax + 1$ в зависимости от a.

Прямые $y = ax + 1$ проходят через $(0;\ 1)$. Граничные положения — параллельно лучам «галочки»: $a = \pm 1$.

• $-1 < a < 1$: прямая пересекает оба луча — 2 корня.

• $|a| \geq 1$: прямая параллельна одному лучу или «круче» его — 1 корень.

Аналитическая проверка: при $x \geq 0$: $x = \dfrac{1}{1 - a}$ (нужно $a < 1$); при $x < 0$: $x = -\dfrac{1}{1 + a}$ (нужно $a > -1$).



ПРИМЕР 2

При каких a уравнение $x^2 + 4 = ax$ имеет единственный корень?

Прямая $y = ax$ из начала координат касается параболы $y = x^2 + 4$: $x^2 - ax + 4 = 0$, $D = a^2 - 16 = 0$.

Ответ: $a = \pm 4$.

Задания раздела 8

8.1 При каких a уравнение $x^2 + 9 = ax$ имеет единственный корень?

8.2 При каких a уравнение $|x| = ax$ имеет бесконечно много корней?

8.3 При каких a уравнение $\sqrt{x} = ax$ имеет ровно два корня?

8.4 При каких a уравнение $x^2 + 3 = a(x + 1)$ имеет ровно один корень?

8.5 При каких a уравнение $|x - 2| = ax$ имеет ровно два корня?

8.6 При каких a уравнение $|x + 1| = a(x - 1)$ имеет ровно два корня?

8.7 При каких a уравнение $\sqrt{4 - x^2} = ax + 2$ имеет ровно два корня?

8.8 При каких a уравнение $|x-3| = ax+1$ имеет ровно два корня?

РАЗДЕЛ 9

Параллельный перенос графика

09

Если параметр стоит «свободным слагаемым» — график или прямая сдвигается, сохраняя форму.

ТЕОРИЯ

Прямые $y = x + a$ — параллельные прямые с угловым коэффициентом 1; при росте a прямая поднимается. «Галочка» $y = |x - a|$ сдвигается вдоль оси Ox.

Граничные положения: прямая проходит через концы или «углы» графика; прямая касается кривой.

> **Важно.** Касание с $y = \sqrt{x}$ удобно искать заменой $t = \sqrt{x} \geq 0$: уравнение становится квадратным относительно t.

ПРИМЕР 1

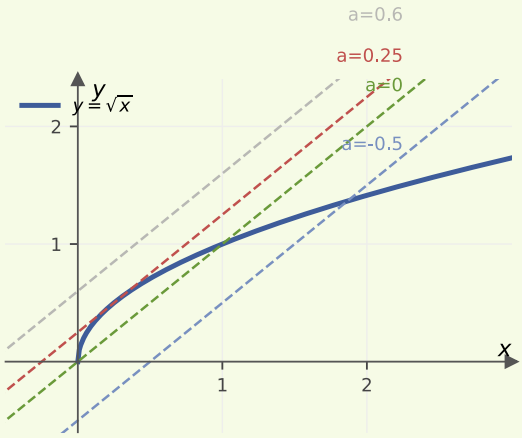
Определите число корней уравнения $\sqrt{x} = x + a$ в зависимости от a.

Замена $t = \sqrt{x} \geq 0$: $t^2 - t + a = 0$. Каждому $t \geq 0$ соответствует ровно один $x = t^2$.

• Два неотрицательных корня по t: $D = 1 - 4a > 0$, $t_1 t_2 = a \geq 0$, $t_1 + t_2 = 1 > 0 \Rightarrow 0 \leq a < \frac{1}{4}$.

• $a = \frac{1}{4}$: $t = \frac{1}{2}$ — касание, 1 корень. • $a < 0$: корни t разных знаков — 1 корень.

Ответ: 2 корня при $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right)$; 1 корень при $a < 0$ или $a = \frac{1}{4}$; нет корней при $a > \frac{1}{4}$.

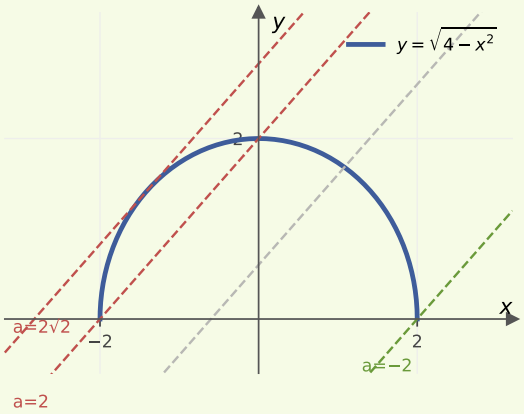


ПРИМЕР 2

Определите число корней уравнения $\sqrt{4-x^2}=x+a$.

Левая часть — верхняя полуокружность радиуса 2. Граничные прямые: через $(2;0)$: $a=-2$; через $(-2;0)$: $a=2$; касательная: расстояние от центра до прямой $x-y+a=0$ равно $\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}=2\Rightarrow a=2\sqrt{2}$.

Ответ: 1 корень при $a\in[-2;\,2)\cup\{2\sqrt{2}\}$; 2 корня при $a\in[2;\,2\sqrt{2})$; нет корней при $a<-2$ или $a>2\sqrt{2}$.



Задания раздела 9

9.1 Определите число корней уравнения $|x|=x+a$.

9.2 При каких a уравнение $\sqrt{x-1}=x+a$ имеет ровно два корня?

9.3 Определите число корней уравнения $\sqrt{1-x^2}=x+a$.

9.4 При каких a уравнение $\sqrt{x+2}=x+a$ имеет ровно один корень?

9.5 При каких a уравнение $|x-a| = 1 - x^2$ имеет ровно один корень?

9.6 При каких a уравнение $|x^2 - 4| = x + a$ имеет ровно три корня?

РАЗДЕЛ 10

Выразить параметр. Плоскость $(x;\ a)$

10

Перевести задачу «про корни» в задачу «про множество значений функции».

ТЕОРИЯ

Приём 1. Выразить a. Если из уравнения можно получить $a = g(x)$, то уравнение имеет корень на множестве M тогда и только тогда, когда a принадлежит **множеству значений** g на M. Число корней — число пересечений $y = g(x)$ с прямой $y = a$.

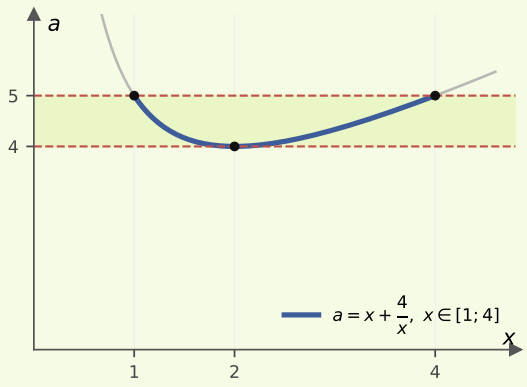
Приём 2. Плоскость $(x;a)$. Рисуем на плоскости с осями x (горизонталь) и a (вертикаль) все точки, удовлетворяющие условию. Затем при каждом a проводим горизонталь и считаем точки на ней.

> **Важно.** Не забывайте исключать точки, где выражение для $g(x)$ теряет смысл (деление на ноль), — их проверяют отдельно.

ПРИМЕР 1

При каких a уравнение $x^2 - ax + 4 = 0$ имеет корень на отрезке $[1;\ 4]$?

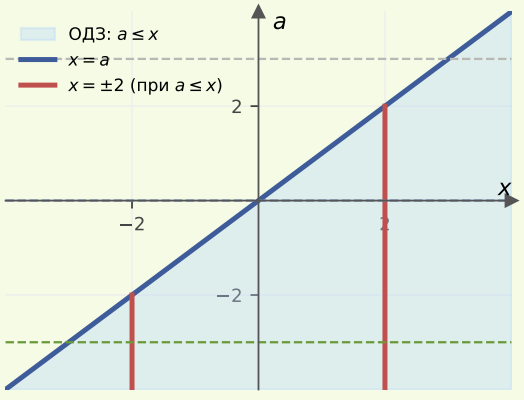
При $x \in [1;4]$ имеем $x \neq 0$, делим: $a = x + \dfrac{4}{x}$. Функция убывает на $[1;2]$ и возрастает на $[2;4]$: $g(1) = 5$, $g(2) = 4$, $g(4) = 5$. Множество значений — $[4;\ 5]$.
Ответ: $a \in [4;\ 5]$.



ПРИМЕР 2

Определите число корней уравнения $(x^2 - 4)\sqrt{x - a} = 0$ в зависимости от a.

ОДЗ: $x \geq a$ (на плоскости — область под прямой $a = x$).
Корни: $x = a$ (всегда), $x = 2$ (если $2 \geq a$), $x = -2$ (если $-2 \geq a$).
• $a < -2$: три корня a, -2, 2; • $-2 \leq a < 2$: два корня ($x = a$ и $x = 2$; при $a = -2$ корень $x = -2$ совпадает с $x = a$); • $a \geq 2$: один корень $x = a$.



Задания раздела 10

10.1 При каких a уравнение $x^2 - 2x = a$ имеет ровно два корня на отрезке $[0;\,3]$?

10.2 При каких a уравнение $(x - a)\sqrt{3 - x} = 0$ имеет ровно один корень?

10.3 При каких a уравнение $x^2 + ax + 1 = 0$ имеет корень на отрезке $[1;\,3]$?

10.4 При каких a уравнение $x^3 - 3x - a = 0$ имеет три корня?

10.5 При каких a уравнение $x^3 - 3x^2 = a$ имеет ровно два корня?

10.6 При каких a уравнение $a(x^2 + 1) = 2x$ имеет хотя бы один корень?

10.7 При каких a уравнение $x^2 - 4x + 3 = a$ имеет на отрезке $[0;\,5]$ ровно один корень?

10.8 Определите число корней уравнения $(x^2-9)\sqrt{x+a}=0$ в зависимости от a.

10.9 При каких a уравнение $x^2-ax+a+3=0$ имеет хотя бы один корень, больший 1?

10.10 При каких a уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{4-x}=a$ имеет ровно два корня?

РАЗДЕЛ 11

Показательные и логарифмические уравнения с параметром

Делать замену и помнить об ограничениях на новую переменную и ОДЗ.

ТЕОРИЯ

Замена $t = b^x$: $t > 0$, и каждому $t > 0$ соответствует ровно один x. Число корней исходного уравнения = число **положительных** корней уравнения относительно t.

Логарифмы: $\log_b f(x) = \log_b g(x) \iff f(x) = g(x) > 0$. Сначала выписываем ОДЗ — именно она чаще всего «съедает» корни.

> **Важно.** Если для квадратного уравнения по t нужны «ровно два положительных корня» — работает теорема Виета из раздела 4.

ПРИМЕР 1

При каких a уравнение $4^x - (a+3)\cdot 2^x + 3a = 0$ имеет ровно один корень?

$t = 2^x > 0$: $t^2 - (a+3)t + 3a = 0 \iff (t-3)(t-a) = 0$. Корень $t = 3$ даёт $x = \log_2 3$ всегда. Корень $t = a$ даёт ещё один корень, если $a > 0$ и $a \neq 3$.
Ответ: $a \in (-\infty;\, 0] \cup \{3\}$.

ПРИМЕР 2

При каких a уравнение $9^x - a\cdot 3^x + 4 = 0$ имеет два корня?

$t = 3^x > 0$: $t^2 - at + 4 = 0$ должно иметь два различных положительных корня: $D = a^2 - 16 > 0$, $t_1 + t_2 = a > 0$, $t_1 t_2 = 4 > 0$.
Ответ: $a > 4$.

Задания раздела 11

11.1 При каких a уравнение $2^x = a$ имеет корень?

11.2 При каких a уравнение $3^x = a - 2$ имеет корень?

11.3 При каком a уравнение $\log_2(x-a)=3$ имеет корень $x=10$?

11.4 Решите уравнение $\log_3(x+a)=\log_3(2x)$.

11.5 При каких a уравнение $4^x-2^{x+1}+a=0$ имеет два корня?

11.6 При каких a уравнение $9^x-(a+1)\cdot 3^x+a=0$ имеет ровно один корень?

11.7 При каких a функция $y=\log_2(x^2-4x+a)$ определена при всех x?

11.8 При каких a уравнение $\log_2(4^x-a)=x$ имеет два корня?

11.9 При каких a уравнение $4^x-a\cdot 2^x+a+3=0$ имеет хотя бы один корень?

11.10 При каких a уравнение $\lg(ax) = 2\lg(x+1)$ имеет ровно один корень?

РАЗДЕЛ 12

Тригонометрические уравнения с параметром

12

Сводить к алгебраической задаче с ограничением $t \in [-1;\,1]$.

ТЕОРИЯ

Замена $t = \sin x$ или $t = \cos x$: $t \in [-1;1]$. Уравнение имеет решения $\iff$ уравнение по t имеет корень на $[-1;1]$.

Удобно выразить $a = g(t)$ и найти множество значений g на $[-1;\,1]$ (раздел 10).

Уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ имеет решения $\iff$ $c^2 \le a^2 + b^2$.

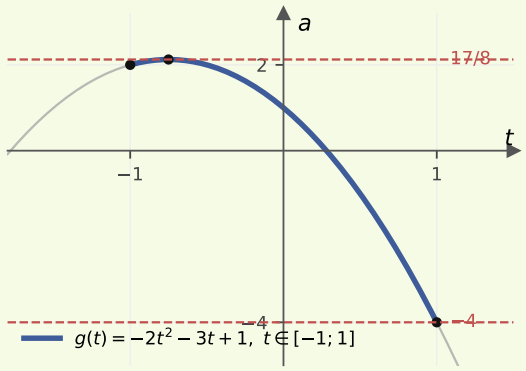
> **Важно.** Если требуется число корней на промежутке — каждое значение $t \in (-1;1)$ даёт на периоде два корня, а $t = \pm 1$ — по одному. Рисуйте единичную окружность!

ПРИМЕР 1

При каких a уравнение $\cos 2x - 3\sin x = a$ имеет решения?

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $t = \sin x \in [-1;1]$: $a = g(t) = -2t^2 - 3t + 1$. Вершина $t_0 = -\dfrac{3}{4} \in [-1;1]$, $g\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{17}{8}$; $g(1) = -4$, $g(-1) = 2$. Множество значений $\left[-4;\,\dfrac{17}{8}\right]$.

Ответ: $a \in \left[-4;\,\dfrac{17}{8}\right]$.



Задания раздела 12

12.1 При каких a уравнение $\sin x = a - 1$ имеет решения?

12.2 При каких a уравнение $\cos x = 2a + 1$ имеет решения?

12.3 При каких a уравнение $\sin^2 x + \sin x = a$ имеет решения?

12.4 При каких a уравнение $\cos^2 x - 2\cos x + a = 0$ имеет решения?

12.5 При каких a уравнение $\sin x = a$ имеет на отрезке $[0;\, \pi]$ ровно два корня?

12.6 При каких a уравнение $\cos x = a$ имеет на отрезке $[0;\, 2\pi]$ ровно один корень?

12.7 При каких a уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ имеет решения?

12.8 При каких a уравнение $a\sin x + \cos x = 2$ имеет решения?

12.9 При каких a уравнение $\sin^2 x - (a+1)\sin x + a = 0$ имеет на $[0;\, 2\pi)$ ровно три корня?

12.10 При каких a уравнение $(\sin x - a)(\cos x - 1) = 0$ имеет на отрезке $[0;\, 2\pi]$ ровно три корня?

РАЗДЕЛ 13

Симметрия и единственность решения

13

Использовать чётность: если x_0 — решение, то и $-x_0$ — решение.

ТЕОРИЯ

Если уравнение не меняется при замене $x \to -x$ (входят x^2, $|x|$, $\cos x$...), то решения идут **парами** $\pm x_0$. Единственное решение возможно только при $x_0 = 0$.

Схема:

1. **Необходимость.** Подставляем $x = 0$, находим «кандидатов» a.
2. **Достаточность.** Для каждого кандидата решаем уравнение и проверяем, что решение действительно единственное.

> **Важно.** Шаг 2 обязателен! Подстановка $x = 0$ даёт только «подозрительные» значения, часть из них обычно не подходит.

Для симметрии относительно $x = c$ (например, $\sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$, $c = 1$) ищем решение $x_0 = c$.

ПРИМЕР 1

При каких a уравнение $x^2 + a|x| + a^2 - 4 = 0$ имеет единственное решение?

Необходимость: $x = 0$ — решение: $a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$.
Проверка $a = 2$: $x^2 + 2|x| = 0 \Rightarrow x = 0$ — единственное. Подходит.
Проверка $a = -2$: $x^2 - 2|x| = 0 \Rightarrow |x|(|x| - 2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ \pm 2$ — три решения. Не подходит.
Ответ: $a = 2$.

Задания раздела 13

13.1 При каких a уравнение $x^4 + x^2 + a = 0$ имеет единственное решение?

13.2 При каких a уравнение $x^2 + 3|x| + a^2 - 4a = 0$ имеет единственное решение?

13.3 При каких a уравнение $2^{|x|}+|x|=a$ имеет единственное решение?

13.4 При каких a уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=a$ имеет единственное решение?

13.5 При каких a система $\begin{cases} y=x^2+a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

13.6 При каких a система $\begin{cases} y=|x|+a, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ имеет единственное решение?

13.7 При каких a уравнение $x^2-a\cos x+a^2-2=0$ имеет единственное решение?

РАЗДЕЛ 14

Системы с параметром: окружности, прямые, модули

14

Читать уравнения как фигуры на плоскости и считать точки их пересечения.

ТЕОРИЯ

Уравнение	Фигура
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$	окружность с центром $(x_0;y_0)$, радиус R
$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=R$	квадрат с вершинами $(\pm R;0)$, $(0;\pm R)$
$y=\lvert x-p\rvert+q$	«галочка» с вершиной $(p;q)$

Расстояние от точки $(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Прямая касается окружности $\iff d=R$.

Две окружности с расстоянием d между центрами касаются $\iff d=R_1+R_2$ (внешне) или $d=|R_1-R_2|$ (внутренне).

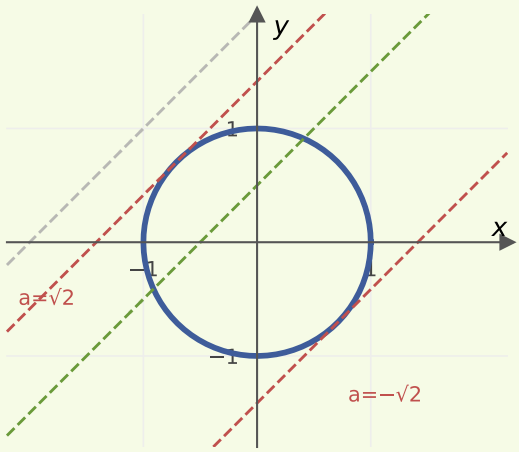
ПРИМЕР 1

Определите число решений системы $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=x+a \end{cases}$ **в зависимости от** a.

Расстояние от $(0;0)$ до прямой $x-y+a=0$: $d=\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}$.

Касание при $d=1$: $a=\pm\sqrt{2}$.

Ответ: 2 решения при $|a|<\sqrt{2}$; 1 при $|a|=\sqrt{2}$; 0 при $|a|>\sqrt{2}$.

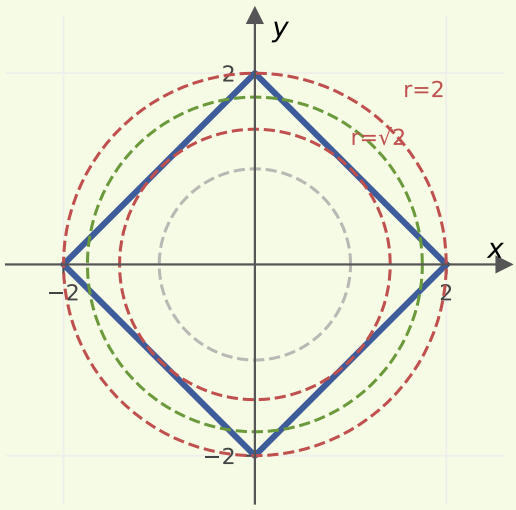


ПРИМЕР 2

Определите число решений системы $\begin{cases} |x| + |y| = 2, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$.

Квадрат с вершинами $(\pm 2; 0)$, $(0; \pm 2)$ и окружность радиуса $|a|$. Расстояние от центра до стороны $x + y = 2$: $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

• $|a| < \sqrt{2}$ или $|a| > 2$: 0; • $|a| = \sqrt{2}$: 4 (касание сторон); • $\sqrt{2} < |a| < 2$: 8; • $|a| = 2$: 4 (вершины).



Задания раздела 14

14.1 Определите число решений системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = a. \end{cases}$

14.2 При каких a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x = 3 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

14.3 При каких a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y = a \end{cases}$ имеет единственное решение?

14.4 При каких a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = ax + 2 \end{cases}$ имеет два решения?

14.5 При каких a окружности $x^2+y^2=1$ и $(x-a)^2+y^2=4$ касаются?

14.6 Определите число решений системы $\begin{cases}|x|+|y|=2,\\ y=x+a.\end{cases}$

14.7 При каких a система $\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=a^2,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ имеет единственное решение?

14.8 При каких a система $\begin{cases}x^2+y^2=a,\\ |x|+|y|=1\end{cases}$ имеет ровно восемь решений?

14.9 При каких a система $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ y-|x|=a\end{cases}$ имеет (а) ровно три решения; (б) ровно четыре решения?

РАЗДЕЛ 15

Задачи формата ЕГЭ (задание 19)

15

Комбинировать методы и оформлять решение полностью: с обоснованием каждого граничного значения.

ТЕОРИЯ

Как оценивается задание 19 (максимум 4 балла). Полный балл — обоснованно получен верный ответ. Частичные баллы ставят за верно полученные граничные точки при неточностях в обосновании или за верно сведённую задачу (уточняйте критерии по демоверсии ЕГЭ-2027 на сайте ФИПИ).

Чек-лист перед ответом:

1. Выписана ОДЗ (корни, логарифмы, знаменатели)?
2. Разобран случай нулевого старшего коэффициента?
3. Проверено, не совпадают ли корни между собой?
4. Каждая граничная точка проверена отдельно: включается или нет?
5. Ответ записан в виде множества значений a.

ПРИМЕР 1

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a|x-3| = \dfrac{5}{x+2}$ имеет на промежутке $[0;\,+\infty)$ ровно два корня.

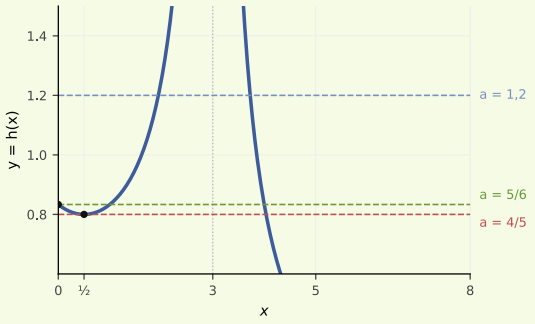
При $x \geq 0$ правая часть положительна, $x = 3$ не корень, значит, $a > 0$ и $a = h(x) = \dfrac{5}{(x+2)|x-3|}$.

• На $[0;3)$: знаменатель $(x+2)(3-x) = -x^2 + x + 6$ максимален при $x = \dfrac{1}{2}$ и равен $\dfrac{25}{4}$, поэтому h убывает от $h(0) = \dfrac{5}{6}$ до $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{5}$, затем возрастает к $+\infty$.

• На $(3;+\infty)$: h убывает от $+\infty$ к 0 — один корень при любом $a > 0$.

Подсчёт: $0 < a < \dfrac{4}{5}$: 1; $a = \dfrac{4}{5}$: 2; $\dfrac{4}{5} < a \leq \dfrac{5}{6}$: 3; $a > \dfrac{5}{6}$: 2.

Ответ: $a \in \left\{\dfrac{4}{5}\right\} \cup \left(\dfrac{5}{6};\,+\infty\right)$.



Задания раздела 15

15.1 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4^x - 2(a+1)\cdot 2^x + 4a = 0$ имеет на отрезке $[0;\ 2]$ ровно один корень.

15.2 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2x - a^2 + 2a = 0$ имеет на отрезке $[0;\ 3]$ ровно один корень.

15.3 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left(x^2-(a+4)x+4a\right)\ln(x-1)=0$ имеет ровно два различных корня.

15.4 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-a}\,(2\cos x-1)=0$ имеет на отрезке $[0;\,2\pi]$ ровно два корня.

15.5 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|x^2-2x+a|\le 5$ выполняется при всех $x\in[-1;\,2]$.

15.6 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$ имеет хотя бы один корень.

15.7 Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} |y|=x+a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения.

15.8 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a|x-4| = \dfrac{3}{x+2}$ имеет на промежутке $[0;\, +\infty)$ ровно два корня.

15.9 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\ln(4x-1) \cdot \sqrt{x^2-6x+6a-a^2} = 0$ имеет на отрезке $[0;\, 1]$ ровно один корень.

15.10 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

ПРОВЕРКА

Ответы

Сверяйте ответ после того, как решили задание целиком.

Раздел 1. Линейные уравнения с параметром

№	Ответ
1.1	$x = \frac{a}{3}$ при любом a
1.2	при $a \neq 0$: $x = \frac{5}{a}$; при $a = 0$ корней нет
1.3	при $a \neq 2$: $x = \frac{7}{a-2}$; при $a = 2$ корней нет
1.4	при $a \neq -1$: $x = 1$; при $a = -1$: x — любое
1.5	при $a \neq 4$: $x = a + 4$; при $a = 4$: x — любое
1.6	$a = 2$
1.7	$a \neq 0$
1.8	$a = 3$
1.9	$a = -1$
1.10	$a > -2$
1.11	$a \in (-\infty;\, -2) \cup (3;\, +\infty)$
1.12	$a \in (-\infty;\, -2) \cup (1;\, +\infty)$

Раздел 2. Линейные неравенства и системы с параметром

№	Ответ
2.1	$a > 0$: $x > \frac{3}{a}$; $a < 0$: $x < \frac{3}{a}$; $a = 0$: решений нет
2.2	$a > 2$: $x \leq 1$; $a < 2$: $x \geq 1$; $a = 2$: x — любое
2.3	$a = 3$
2.4	$a > 3$
2.5	$a < 3$: $x \in (a;\, 3)$; $a \geq 3$: решений нет
2.6	$a = -1$
2.7	$a = 2$
2.8	$a \in (-\infty;\, 2) \cup (3;\, +\infty)$
2.9	$a = 2$
2.10	$a > 1$
2.11	$a \in [2;\, 3)$
2.12	$a \in (-1;\, 2)$

Раздел 3. Квадратные уравнения с параметром

№	Ответ
3.1	$a < 9$
3.2	$a = \pm 4$
3.3	$a > 1$
3.4	$a = 1$; второй корень -3
3.5	$a \geq -1$
3.6	$a \in \{2;\ 6\}$
3.7	корни $a-1$ и $a+1$; $a \in [1;\ 3]$
3.8	$a = -3$
3.9	$a \in \{1;\ 3\}$
3.10	$a \in \{-3;\ -2;\ 7\}$
3.11	$a = -2$

Раздел 4. Теорема Виета и расположение корней

№	Ответ
4.1	сумма 7, произведение 10
4.2	$a < 0$
4.3	$a \in (0;\ 9)$
4.4	$a = 1$
4.5	$a = 3$
4.6	$a > 2$
4.7	$a < 1$
4.8	$a \in \left(2;\ \frac{5}{2}\right)$
4.9	$a \in [4;\ 8)$
4.10	$a \in \left[2\sqrt{2};\ \frac{11}{3}\right)$
4.11	$a \in (-3;\ 1) \cup (3;\ 7)$
4.12	$a = \pm\frac{1}{2}$

Раздел 5. Квадратные неравенства: «при всех x»

№	Ответ
5.1	$a > 4$
5.2	$a \in [-6;\ 6]$
5.3	$a < -1$
5.4	$a > 2$
5.5	$a \leq -3$
5.6	$a \in [-1;\ 3]$
5.7	$a \in [-1;\ 2]$
5.8	$a \in [0;\ 4]$
5.9	$a \in (-1;\ 0] \cup [4;\ 5)$
5.10	$a > -4$
5.11	$a < 2$

Раздел 6. Дробно-рациональные уравнения с параметром

№	Ответ
6.1	при $a \neq -2$: $x = 2a$; при $a = -2$ корней нет
6.2	$a = 5$
6.3	$a \neq \pm 2$
6.4	при $a \neq 0$: $x = \frac{a+2}{2}$; при $a = 0$ корней нет
6.5	$a \in \{-3;\ 2\}$
6.6	$a \in \{2;\ 3\}$
6.7	при $a = 0$ и $a = \frac{1}{2}$ корней нет; иначе $x = \frac{1}{a}$
6.8	при $a \neq 0$: $x = 2a$; при $a = 0$ корней нет
6.9	$a \in \{-1;\ 1;\ 3\}$
6.10	$a \in \left\{2;\ \frac{9}{4}\right\}$
6.11	$a \neq 1,\ a \neq 3$
6.12	$a \in \left\{-\frac{10}{3};\ -2;\ 2\right\}$

Раздел 7. Графический метод: горизонтальная прямая $y = a$

№	Ответ
7.1	$a < 0$: 0; $a = 0$: 1; $a > 0$: 2
7.2	$a > -1$
7.3	$a > -4$
7.4	$a \in (0;\ 1)$
7.5	$a = 1$
7.6	$a \in (-1;\ 3)$
7.7	$a < 4$: 0; $a = 4$: бесконечно много; $a > 4$: 2
7.8	три — при $a = 2$; четыре — при $a \in (0;\ 2)$
7.9	$a \in (0;\ 4)$
7.10	$a \in (-4;\ 4)$
7.11	$a = 4$
7.12	шесть — при $a \in (3;\ 4)$; пять — при $a = 3$

Раздел 8. Пучок прямых: поворот вокруг точки

№	Ответ
8.1	$a = \pm 6$
8.2	$a = \pm 1$
8.3	$a > 0$
8.4	$a \in \{-6;\ 2\}$
8.5	$a \in (0;\ 1)$
8.6	$a \in (-1;\ 0)$
8.7	$a \in [-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$
8.8	$a \in \left(-\frac{1}{3};\ 1\right)$

Раздел 9. Параллельный перенос графика

№	Ответ
9.1	$a > 0$: 1; $a = 0$: бесконечно много; $a < 0$: нет
9.2	$a \in \left[-1;\ -\frac{3}{4}\right)$
9.3	1 корень: $a \in [-1;\ 1) \cup \{\sqrt{2}\}$; 2 корня: $a \in [1;\ \sqrt{2})$; иначе нет
9.4	$a \in (-\infty;\ 2) \cup \left\{\frac{9}{4}\right\}$
9.5	$a = \pm\frac{5}{4}$
9.6	$a \in \left\{2;\ \frac{17}{4}\right\}$

Раздел 10. Выразить параметр. Плоскость $(x;\ a)$

№	Ответ
10.1	$a \in (-1;\ 0]$
10.2	$a \geq 3$
10.3	$a \in \left[-\frac{10}{3};\ -2\right]$
10.4	$a \in (-2;\ 2)$
10.5	$a \in \{-4;\ 0\}$
10.6	$a \in [-1;\ 1]$
10.7	$a \in \{-1\} \cup (3;\ 8]$
10.8	$a > 3$: 3; $-3 < a \leq 3$: 2; $a \leq -3$: 1
10.9	$a \geq 6$
10.10	$a \in [2;\ 2\sqrt{2})$

Раздел 11. Показательные и логарифмические уравнения с параметром

№	Ответ
11.1	$a > 0$
11.2	$a > 2$
11.3	$a = 2$
11.4	при $a > 0$: $x = a$; при $a \le 0$ корней нет
11.5	$a \in (0;\, 1)$
11.6	$a \in (-\infty;\, 0] \cup \{1\}$
11.7	$a > 4$
11.8	$a \in \left(-\frac{1}{4};\, 0\right)$
11.9	$a \in (-\infty;\, -3) \cup [6;\, +\infty)$
11.10	$a \in (-\infty;\, 0) \cup \{4\}$

Раздел 12. Тригонометрические уравнения с параметром

№	Ответ
12.1	$a \in [0;\, 2]$
12.2	$a \in [-1;\, 0]$
12.3	$a \in \left[-\frac{1}{4};\, 2\right]$
12.4	$a \in [-3;\, 1]$
12.5	$a \in [0;\, 1)$
12.6	$a = -1$
12.7	$a \in \left[\frac{1}{2};\, 1\right]$
12.8	$a \in (-\infty;\, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};\, +\infty)$
12.9	$a \in (-1;\, 1)$
12.10	$a \in \{-1;\, 0;\, 1\}$

Раздел 13. Симметрия и единственность решения

№	Ответ
13.1	$a = 0$
13.2	$a \in \{0;\, 4\}$
13.3	$a = 1$
13.4	$a = 2$
13.5	$a = 1$
13.6	$a = 2$
13.7	$a \in \{-1;\, 2\}$

Раздел 14. Системы с параметром: окружности, прямые, модули

№	Ответ
14.1	$\lvert a\rvert < 2$: 2; $\lvert a\rvert = 2$: 1; $\lvert a\rvert > 2$: 0
14.2	$\lvert a\rvert > 3$
14.3	$a = \pm 3\sqrt{2}$
14.4	$\lvert a\rvert > \sqrt{3}$
14.5	$a \in \{-3;\, -1;\, 1;\, 3\}$
14.6	$\lvert a\rvert < 2$: 2; $\lvert a\rvert = 2$: бесконечно много; $\lvert a\rvert > 2$: 0
14.7	$a \in \{-6;\, -4;\, 4;\, 6\}$
14.8	$a \in \left(\frac{1}{2};\, 1\right)$
14.9	(а) $a = -2$; (б) $a \in (-2\sqrt{2};\, -2)$

Раздел 15. Задачи формата ЕГЭ (задание 19)

№	Ответ
15.1	$a \in \left(-\infty;\, \frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup (2;\, +\infty)$
15.2	$a \in [-1;\, 0) \cup \{1\} \cup (2;\, 3]$
15.3	$a \in (-\infty;\, 1] \cup \{2;\, 4\}$
15.4	$a \in (-\infty;\, 0) \cup \left[\frac{\pi}{3};\, \frac{5\pi}{3}\right)$
15.5	$a \in [-4;\, 2]$
15.6	$a \in \left[0;\, \frac{2}{3}\right]$
15.7	$a \in (1;\, \sqrt{2})$
15.8	$a \in \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left(\frac{3}{8};\, +\infty\right)$
15.9	$a \in \left(\frac{1}{4};\, \frac{1}{2}\right] \cup (1;\, 5) \cup \left[\frac{11}{2};\, \frac{23}{4}\right)$
15.10	$a \in \left(\frac{1}{2};\, 4+\sqrt{6}\right)$

РАЗБОР

Решения

Краткие решения: ключевая идея и выкладки. Полное оформление (как на ЕГЭ) — в разобранных примерах.

Раздел 1. Линейные уравнения с параметром

1.1 Коэффициент $3 \neq 0$, поэтому делим: $x = \dfrac{a}{3}$.

Ответ: $x = \dfrac{a}{3}$ **при любом** a

1.2 При $a = 0$: $0 \cdot x = 5$ — корней нет. При $a \neq 0$: $x = \dfrac{5}{a}$.

Ответ: **при** $a \neq 0$**:** $x = \dfrac{5}{a}$**; при** $a = 0$ **корней нет**

1.3 $a = 2$: $0 \cdot x = 7$ — корней нет. $a \neq 2$: $x = \dfrac{7}{a-2}$.

Ответ: **при** $a \neq 2$**:** $x = \dfrac{7}{a-2}$**; при** $a = 2$ **корней нет**

1.4 $a = -1$: $0 \cdot x = 0$ — любое x. Иначе делим на $a+1$: $x = 1$.

Ответ: **при** $a \neq -1$**:** $x = 1$**; при** $a = -1$**:** x **— любое**

1.5 $a^2 - 16 = (a-4)(a+4)$. При $a \neq 4$ $x = a + 4$; при $a = 4$ получаем $0 = 0$.

Ответ: **при** $a \neq 4$**:** $x = a + 4$**; при** $a = 4$**:** x **— любое**

1.6 Подставляем $x = 3$: $6 + a = 15 - 7 = 8$, откуда $a = 2$.

Ответ: $a = 2$

1.7 При $a \neq 0$ корень один: $x = a$. При $a = 0$: $0 \cdot x = 0$ — бесконечно много корней.

Ответ: $a \neq 0$

1.8 Корней нет, когда $A = 0$, а $B \neq 0$. $a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a = \pm 3$. При $a = 3$: $0 \cdot x = 6$ — нет корней. При $a = -3$: $0 \cdot x = 0$ — любое x.

Ответ: $a = 3$

1.9 Нужно $A = 0$ и $B = 0$ одновременно: $a^2 - 1 = 0$ и $a(a+1) = 0$. Общее значение — только $a = -1$. (При $a = 1$: $0 \cdot x = 2$ — нет корней.)

Ответ: $a = -1$

1.10 При $a = -2$ корней нет. Иначе $x = \dfrac{6}{a+2} > 0 \iff a + 2 > 0 \iff a > -2$.

Ответ: $a > -2$

1.11 $(3 - a)x = a + 2$. При $a = 3$: $0 \cdot x = 5$ — корней нет. Иначе $x = \dfrac{a+2}{3-a} < 0$. Метод интервалов для дроби: $a < -2$ или $a > 3$.

Ответ: $a \in (-\infty;\, -2) \cup (3;\, +\infty)$

1.12 $(a-1)x = 3a$. При $a = 1$: $0 = 3$ — нет корней. Иначе $x = \dfrac{3a}{a-1}$. Условие $\dfrac{3a}{a-1} > 2 \iff \dfrac{a+2}{a-1} > 0 \iff a < -2$ или $a > 1$.

Ответ: $a \in (-\infty;\, -2) \cup (1;\, +\infty)$

Раздел 2. Линейные неравенства и системы с параметром

2.1 Три случая по знаку a. При $a=0$: $0>3$ — неверно.
Ответ: $a>0$: $x>\dfrac{3}{a}$; $a<0$: $x<\dfrac{3}{a}$; $a=0$: **решений нет**

2.2 При $a=2$: $0\le 0$ — верно при всех x. При $a>2$ делим, знак сохраняется; при $a<2$ — меняется.
Ответ: $a>2$: $x\le 1$; $a<2$: $x\ge 1$; $a=2$: x — **любое**

2.3 Если $a\neq 3$, решения есть (луч). При $a=3$: $0>2$ — неверно.
Ответ: $a=3$

2.4 Подставляем: $3a-2>a+4\Rightarrow 2a>6\Rightarrow a>3$.
Ответ: $a>3$

2.5 Промежуток $(a;3)$ непуст только при $a<3$.
Ответ: $a<3$: $x\in(a;\,3)$; $a\ge 3$: **решений нет**

2.6 Если $a+1\neq 0$, решение — луч, а не вся прямая. При $a=-1$: $0\le 0$ — верно всегда.
Ответ: $a=-1$

2.7 Нужно $a>0$ (знак не меняется) и $\dfrac{4}{a}=2$, то есть $a=2$.
Ответ: $a=2$

2.8 $5(a-2)<(a-2)(a+2)\iff(a-2)(a+2-5)>0\iff(a-2)(a-3)>0$, откуда $a<2$ или $a>3$.
Ответ: $a\in(-\infty;\,2)\cup(3;\,+\infty)$

2.9 Отрезок $[2;a]$ состоит из одной точки, только если $a=2$.
Ответ: $a=2$

2.10 Интервал $(a;\,2a-1)$ непуст при $a<2a-1$, то есть $a>1$.
Ответ: $a>1$

2.11 Решения — промежуток $(a;\,4]$. Два целых решения — это 4 и 3: число 3 должно попасть в промежуток ($a<3$), а 2 — нет ($a\ge 2$).
Ответ: $a\in[2;\,3)$

2.12 $f(x)=ax+2$ — линейная функция, на отрезке она принимает наименьшее значение на одном из концов. Нужно $f(-1)=2-a>0$ и $f(2)=2a+2>0$: $-1<a<2$.
Ответ: $a\in(-1;\,2)$

Раздел 3. Квадратные уравнения с параметром

3.1 $\dfrac{D}{4}=9-a>0\Rightarrow a<9$.
Ответ: $a<9$

3.2 $D=a^2-16=0\Rightarrow a=\pm 4$.
Ответ: $a=\pm 4$

3.3 $\dfrac{D}{4}=1-a<0\Rightarrow a>1$.
Ответ: $a>1$

3.4 $4+2a-6=0\Rightarrow a=1$. По Виета $x_1x_2=-6$, значит $x_2=-3$.
Ответ: $a=1$; **второй корень** -3

3.5 $a=0$: $x=\dfrac{1}{2}$ — подходит. $a\neq 0$: $\dfrac{D}{4}=1+a\geq 0\Rightarrow a\geq -1$. Объединяем: $a\geq -1$.

Ответ: $a\geq -1$

3.6 $a=2$: $-4x+5=0$ — один корень. $a\neq 2$: $\dfrac{D}{4}=a^2-(a-2)(a+3)=6-a=0\Rightarrow a=6$.

Ответ: $a\in\{2;\,6\}$

3.7 $(x-a)^2=1\Rightarrow x=a\pm 1$. Нужно $a-1\geq 0$ и $a+1\leq 4$: $1\leq a\leq 3$.

Ответ: **корни** $a-1$ **и** $a+1$**;** $a\in[1;\,3]$

3.8 Разложение: $(x-3)(x+a)=0$, корни 3 и $-a$. Они совпадают при $a=-3$.

Ответ: $a=-3$

3.9 Корни: $1,\ 3,\ a$. Различных ровно два, если a совпадает с 1 или 3.

Ответ: $a\in\{1;\,3\}$

3.10 $a=-2$: $6x-8=0$ — один корень. $a\neq -2$: $\dfrac{D}{4}=9-(a+2)(a-6)=-(a-7)(a+3)=0\Rightarrow a=7$ или $a=-3$.

Ответ: $a\in\{-3;\,-2;\,7\}$

3.11 Вычтем: $(a-1)x+(1-a)=0\Rightarrow (a-1)(x-1)=0$. При $a=1$ оба уравнения $x^2+x+1=0$ корней не имеют. Значит общий корень $x=1$: $1+a+1=0\Rightarrow a=-2$. Проверка: $x^2-2x+1=0$ и $x^2+x-2=0$ — общий корень 1.

Ответ: $a=-2$

Раздел 4. Теорема Виета и расположение корней

4.1 По теореме Виета $x_1+x_2=7$, $x_1x_2=10$ (и $D=9>0$, корни есть).

Ответ: **сумма** 7**, произведение** 10

4.2 Нужно $x_1x_2=a<0$.

Ответ: $a<0$

4.3 $\dfrac{D}{4}=9-a>0$, $x_1+x_2=6>0$, $x_1x_2=a>0$: $0<a<9$.

Ответ: $a\in(0;\,9)$

4.4 $\dfrac{D}{1}=(a-2)^2\geq 0$ — корни есть всегда. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2a+2=(a-1)^2+1$ — минимум при $a=1$.

Ответ: $a=1$

4.5 $x_2=3x_1$, $x_1+x_2=4x_1=4\Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$, $a=x_1x_2=3$.

Ответ: $a=3$

4.6 $\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-9>0\Rightarrow a>2$ или $a<-4$; $x_1+x_2=-2(a+1)<0\Rightarrow a>-1$; $x_1x_2=9>0$. Итого $a>2$.

Ответ: $a>2$

4.7 $f(2)=4+2a+a-7=3a-3<0\Rightarrow a<1$.

Ответ: $a<1$

4.8 Старший коэффициент может быть отрицательным, поэтому условие: $(a-2)\cdot f(1)<0$, $f(1)=2a-5$. $(a-2)(2a-5)<0\iff 2<a<\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $a\in\left(2;\,\dfrac{5}{2}\right)$

4.9 $\frac{D}{4} = (a-1)^2 - (a+5) = (a-4)(a+1) \geq 0$; $x_0 = a - 1 > 1 \Rightarrow a > 2$; $f(1) = 8 - a > 0 \Rightarrow a < 8$. Пересечение: $4 \leq a < 8$.

Ответ: $a \in [4;\ 8)$

4.10 $D = a^2 - 8 \geq 0$; $0 < \frac{a}{2} < 3$; $f(0) = 2 > 0$; $f(3) = 11 - 3a > 0$. Отсюда $a \geq 2\sqrt{2}$ и $a < \frac{11}{3}$ (при этом $2\sqrt{2} \approx 2{,}83 < 3{,}67$).

Ответ: $a \in \left[2\sqrt{2};\ \frac{11}{3}\right)$

4.11 Корни $a - 3$ и $a + 3$ (расстояние между ними $6 > 4$, поэтому оба сразу в интервал не попадут). $a - 3 \in (0;4) \iff a \in (3;7)$; $a + 3 \in (0;4) \iff a \in (-3;1)$.

Ответ: $a \in (-3;\ 1) \cup (3;\ 7)$

4.12 $D = 5a^2 \geq 0$. $x_1^2 + x_2^2 = 9a^2 - 2a^2 = 7a^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4}$.

Ответ: $a = \pm\frac{1}{2}$

Раздел 5. Квадратные неравенства: «при всех x»

5.1 $\frac{D}{4} = 4 - a < 0$.

Ответ: $a > 4$

5.2 $D = a^2 - 36 \leq 0$.

Ответ: $a \in [-6;\ 6]$

5.3 Ветви вниз; нужно $\frac{D}{4} = 1 + a < 0$.

Ответ: $a < -1$

5.4 $a = 0$: $4x > 0$ — не при всех x. $a \neq 0$: $a > 0$ и $\frac{D}{4} = 4 - a^2 < 0 \Rightarrow a > 2$.

Ответ: $a > 2$

5.5 $a = 0$: $-6x \leq 0$ — не всегда. Иначе $a < 0$ и $\frac{D}{4} = 9 - a^2 \leq 0 \Rightarrow a \leq -3$.

Ответ: $a \leq -3$

5.6 $a = -1$: $4 \geq 0$ — да. Иначе $a > -1$ и $\frac{D}{4} = (a+1)(a-3) \leq 0 \Rightarrow -1 < a \leq 3$.

Ответ: $a \in [-1;\ 3]$

5.7 Нужно $x^2 - 2ax + a + 2 \geq 0$ при всех x: $\frac{D}{4} = a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) \leq 0$.

Ответ: $a \in [-1;\ 2]$

5.8 Нужно $ax^2 + 2ax + 4 \geq 0$ при всех x. $a = 0$: $4 \geq 0$ — да. Иначе $a > 0$, $\frac{D}{4} = a^2 - 4a \leq 0 \Rightarrow 0 < a \leq 4$.

Ответ: $a \in [0;\ 4]$

5.9 Решение — отрезок между 2 и a. Если $a \geq 2$: $[2;a]$ содержит $2, 3, 4$ и не содержит 5 при $4 \leq a < 5$. Если $a < 2$: $[a;2]$ содержит $0, 1, 2$ при $-1 < a \leq 0$.

Ответ: $a \in (-1;\ 0] \cup [4;\ 5)$

5.10 При $x > 0$ делим на x: $a > -\left(x + \frac{4}{x}\right)$. Так как $x + \frac{4}{x} \geq 4$ (равенство при $x = 2$), правая часть не больше -4 и достигает -4. Значит, $a > -4$.

Ответ: $a > -4$

5.11 При $x>0$ делим на $2x$: $a<\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$. На $[1;3]$ правая часть убывает до $x=2$ и затем возрастает; её минимум $\dfrac{2}{2}+\dfrac{2}{2}=2$. Неравенство $a<g(x)$ при всех x из отрезка $\iff a<\min g=2$.

Ответ: $a<2$

Раздел 6. Дробно-рациональные уравнения с параметром

6.1 $x=2a$, но $x\neq -4$, то есть $a\neq -2$.

Ответ: **при** $a\neq -2$**:** $x=2a$**; при** $a=-2$ **корней нет**

6.2 Единственный кандидат $x=a$ посторонний при $a=5$.

Ответ: $a=5$

6.3 $x=-a$, нужно $-a\neq\pm 2$.

Ответ: $a\neq\pm 2$

6.4 $a=2(x-1)\Rightarrow x=\dfrac{a+2}{2}$. Условие $x\neq 1\iff a\neq 0$. При $a=0$ получаем $0=2$ — нет корней.

Ответ: **при** $a\neq 0$**:** $x=\dfrac{a+2}{2}$**; при** $a=0$ **корней нет**

6.5 Корни a и -3, $x\neq 2$. Один корень, если $a=-3$ (совпадение) или $a=2$ (посторонний).

Ответ: $a\in\{-3;\,2\}$

6.6 Корни числителя 2 и 3; один из них выпадает, если $a=2$ или $a=3$.

Ответ: $a\in\{2;\,3\}$

6.7 $a=0$: $-1=0$ — нет. $a\neq 0$: $x=\dfrac{1}{a}$, нужно $\dfrac{1}{a}\neq 2\iff a\neq\dfrac{1}{2}$.

Ответ: **при** $a=0$ **и** $a=\dfrac{1}{2}$ **корней нет; иначе** $x=\dfrac{1}{a}$

6.8 $x=2x-2a\Rightarrow x=2a$. Условие $2a\neq a\iff a\neq 0$.

Ответ: **при** $a\neq 0$**:** $x=2a$**; при** $a=0$ **корней нет**

6.9 Числитель $=(x-3)(x-a)$, $x\neq\pm 1$. Корень 3 подходит всегда; корень a выпадает при $a=\pm 1$ и совпадает с 3 при $a=3$.

Ответ: $a\in\{-1;\,1;\,3\}$

6.10 1) $D=9-4a=0$: $a=\dfrac{9}{4}$, корень $\dfrac{3}{2}\neq 1$ — подходит. 2) $D>0$ и один из корней равен 1: $1-3+a=0\Rightarrow a=2$, корни 1 и 2, остаётся 2.

Ответ: $a\in\left\{2;\,\dfrac{9}{4}\right\}$

6.11 Корни числителя $a\pm 1$ различны всегда. Один выпадает, если $a-1=2$ ($a=3$) или $a+1=2$ ($a=1$).

Ответ: $a\neq 1,\ a\neq 3$

6.12 1) $D=a^2-4=0$: $a=\pm 2$, корень $\pm 1\neq -3$ — подходит. 2) $D>0$ и $x=-3$ — корень числителя: $9+3a+1=0\Rightarrow a=-\dfrac{10}{3}$; второй корень $-\dfrac{1}{3}$ (произведение корней 1).

Ответ: $a\in\left\{-\dfrac{10}{3};\,-2;\,2\right\}$

Раздел 7. Графический метод: горизонтальная прямая $y=a$

7.1 График $y=|x|$ — «галочка» с вершиной в начале координат.

Ответ: $a<0$**: 0;** $a=0$**: 1;** $a>0$**: 2**

7.2 Два корня, когда правая часть положительна: $a+1>0$.

Ответ: $a>-1$

7.3 Вершина параболы $(3;\,-4)$. Прямая $y=a$ выше вершины пересекает параболу дважды.

Ответ: $a>-4$

7.4 Горб высотой 1 на отрезке $[-1;1]$. Четыре пересечения — строго между дном (0) и вершиной горба (1).

Ответ: $a\in(0;\,1)$

7.5 Нули 2 и 4, вершина $(3;\,-1)$, после отражения — горб высотой 1. Три корня — при касании вершины горба.

Ответ: $a=1$

7.6 График «W»: при $x\geq 0$ — парабола x^2-4x+3 с вершиной $(2;-1)$, $f(0)=3$, затем отражение. Четыре корня при $-1<a<3$; при $a=3$ — три корня.

Ответ: $a\in(-1;\,3)$

7.7 На $[-3;1]$ сумма равна 4 (горизонтальный участок), вне отрезка растёт. При $a=4$ корни — весь отрезок $[-3;1]$.

Ответ: $a<4$**: 0;** $a=4$**: бесконечно много;** $a>4$**: 2**

7.8 График: нули ± 2, в точке $x=0$ значение 2 (вершина «W»). При $a=2$: $x=0,\ \pm 4$.

Ответ: **три — при** $a=2$**; четыре — при** $a\in(0;\,2)$

7.9 $x\geq 4$: $y=x^2-4x$ (возрастает от 0); $x<4$: $y=-x^2+4x$ — парабола с вершиной $(2;4)$, при $x<0$ значения отрицательны. Три пересечения при $0<a<4$.

Ответ: $a\in(0;\,4)$

7.10 $f(x)=-4$ при $x\leq -2$, $f(x)=2x$ на $[-2;2]$, $f(x)=4$ при $x\geq 2$. При $|a|<4$ — один корень, при $a=\pm 4$ — бесконечно много, при $|a|>4$ — нет.

Ответ: $a\in(-4;\,4)$

7.11 $\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$ при $x\neq 2$ — прямая с «выколотой» точкой $(2;4)$. Прямая $y=a$ не пересекает её только при $a=4$.

Ответ: $a=4$

7.12 $g(x)=x^2-2|x|-3$: нули ± 3, $g(0)=-3$, минимумы $g(\pm 1)=-4$. После отражения: в нуле значение 3, в точках ± 1 — пики высотой 4. При $3<a<4$ на каждой полуоси по три пересечения; при $a=3$ добавляется $x=0$ и пропадает по одному — всего пять.

Ответ: **шесть — при** $a\in(3;\,4)$**; пять — при** $a=3$

Раздел 8. Пучок прямых: поворот вокруг точки

8.1 $x^2-ax+9=0$, $D=a^2-36=0$.

Ответ: $a=\pm 6$

8.2 Прямая $y=ax$ совпадает с одним из лучей «галочки» при $a=1$ (все $x\geq 0$) и $a=-1$ (все $x\leq 0$).

Ответ: $a=\pm 1$

8.3 $x=0$ — корень всегда. При $x>0$: $\sqrt{x}=\dfrac{1}{a}$ — корень $x=\dfrac{1}{a^2}$ есть только при $a>0$.

Ответ: $a>0$

8.4 Прямые проходят через $(-1;\,0)$. $x^2-ax+3-a=0$, $D=a^2+4a-12=(a+6)(a-2)=0$.

Ответ: $a\in\{-6;\,2\}$

8.5 Пучок через $(0;0)$, «галочка» с вершиной $(2;0)$. Прямая пересекает оба луча, если она идёт выше вершины ($a>0$) и не круче правого луча ($a<1$).

Ответ: $a\in(0;\,1)$

8.6 Центр пучка $(1;0)$, вершина «галочки» $(-1;0)$. Два пересечения, когда прямая идёт вниз-влево положе левого луча: $-1<a<0$. Проверка аналитически: $x\geq -1$: $x=\dfrac{a+1}{a-1}$ — подходит при $a\leq 0$ или $a>1$; $x<-1$: $x=\dfrac{a-1}{a+1}$ — при $-1<a<0$.

Ответ: $a\in(-1;\,0)$

8.7 График — верхняя полуокружность радиуса 2; центр пучка $(0;2)$ лежит на ней, $x=0$ — корень всегда. Второй корень $x=-\dfrac{4a}{1+a^2}$ (из возведения в квадрат) нужен $\neq 0$ и с условием $ax+2\geq 0$: $\dfrac{2-2a^2}{1+a^2}\geq 0 \iff |a|\leq 1$.

Ответ: $a\in[-1;\,0)\cup(0;\,1]$

8.8 Центр пучка $(0;1)$, вершина «галочки» $(3;0)$. Прямая через вершину: $a=-\dfrac{1}{3}$; параллельно правому лучу: $a=1$. Между ними прямая пересекает оба луча.

Ответ: $a\in\left(-\dfrac{1}{3};\,1\right)$

Раздел 9. Параллельный перенос графика

9.1 При $x\geq 0$: $0=a$. При $x<0$: $x=-\dfrac{a}{2}$, нужно $a>0$. При $a=0$ подходит любое $x\geq 0$.

Ответ: $a>0$**: 1;** $a=0$**: бесконечно много;** $a<0$**: нет**

9.2 $t=\sqrt{x-1}\geq 0$, $x=t^2+1$: $t^2-t+1+a=0$. Два неотрицательных корня: $D=-3-4a>0$, $t_1t_2=1+a\geq 0$.

Ответ: $a\in\left[-1;\,-\dfrac{3}{4}\right)$

9.3 Как во втором примере, только радиус 1: прямые через $(1;0)$ и $(-1;0)$ дают $a=-1$ и $a=1$, касательная — $a=\sqrt{2}$.

Ответ: **1 корень:** $a\in[-1;\,1)\cup\{\sqrt{2}\}$**; 2 корня:** $a\in[1;\,\sqrt{2})$**; иначе нет**

9.4 $t=\sqrt{x+2}\geq 0$: $t^2-t+a-2=0$. Ровно один $t\geq 0$: либо $D=9-4a=0$ ($a=\dfrac{9}{4}$, $t=\dfrac{1}{2}$), либо корни разных знаков ($a-2<0$). При $a=2$: $t=0$ и $t=1$ — два корня.

Ответ: $a\in(-\infty;\,2)\cup\left\{\dfrac{9}{4}\right\}$

9.5 «Галочка» с вершиной $(a;0)$ и «шапка» $y=1-x^2$. Один корень — при касании луча и параболы. Правый луч $y=x-a$: $x^2+x-a-1=0$, $D=4a+5=0\Rightarrow a=-\dfrac{5}{4}$ (точка касания $x=-\dfrac{1}{2}\geq a$ — на луче). Левый луч симметрично: $a=\dfrac{5}{4}$. При $|a|\leq 1$ вершина внутри шапки — 2 корня.

Ответ: $a=\pm\dfrac{5}{4}$

9.6 Прямая $y=x+a$ через точку $(-2;0)$: $a=2$ — корни $-2,\ 1,\ 3$. Касание с горбом $y=4-x^2$: $x^2+x+a-4=0$, $D=17-4a=0\Rightarrow a=\dfrac{17}{4}$ (точка $x=-\dfrac{1}{2}$ на горбе) — ещё два пересечения с крайними ветвями. Между этими значениями — 4 корня, при $-2<a<2$ — 2 корня.

Ответ: $a\in\left\{2;\,\dfrac{17}{4}\right\}$

Раздел 10. Выразить параметр. Плоскость $(x;\ a)$

10.1 На $[0;3]$: $g(0)=0$, минимум $g(1)=-1$, $g(3)=3$. Горизонталь пересекает обе «ветви» при $-1<a\le 0$.

Ответ: $a\in(-1;\ 0]$

10.2 $x=3$ — корень всегда. $x=a$ — корень, если $a\le 3$; при $a=3$ корни совпадают. Один корень при $a\ge 3$.

Ответ: $a\ge 3$

10.3 $a=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$. На $[1;3]$ $x+\dfrac{1}{x}$ возрастает от 2 до $\dfrac{10}{3}$.

Ответ: $a\in\left[-\dfrac{10}{3};\ -2\right]$

10.4 $g(x)=x^3-3x$: $g'(x)=3(x^2-1)$, максимум $g(-1)=2$, минимум $g(1)=-2$. Три пересечения — строго между ними.

Ответ: $a\in(-2;\ 2)$

10.5 $g'(x)=3x(x-2)$: максимум $g(0)=0$, минимум $g(2)=-4$. Ровно два корня — при касании горизонтали в экстремуме.

Ответ: $a\in\{-4;\ 0\}$

10.6 $a=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Так как $x^2+1\ge 2|x|$, то $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\le 1$, и значения ±1 достигаются при $x=\pm1$.

Ответ: $a\in[-1;\ 1]$

10.7 $g(0)=3$, $g(2)=-1$, $g(5)=8$. Один корень: касание в вершине ($a=-1$) или горизонталь выше левого конца ($g(0)=3$), но не выше правого: $3<a\le 8$.

Ответ: $a\in\{-1\}\cup(3;\ 8]$

10.8 ОДЗ $x\ge -a$. Корни: $x=-a$; $x=3$ при $a\ge -3$; $x=-3$ при $a\ge 3$. При $a=3$ корни -3 и $-a$ совпадают (остаются -3 и 3); при $a=-3$ совпадают 3 и $-a$, а $x=-3$ вне ОДЗ — корень один.

Ответ: $a>3$**: 3;** $-3<a\le 3$**: 2;** $a\le -3$**: 1**

10.9 $x=1$ не корень ($4\ne 0$). При $x>1$: $a=\dfrac{x^2+3}{x-1}$. Замена $s=x-1>0$: $a=s+\dfrac{4}{s}+2\ge 6$ (равенство при $s=2$), значения неограниченно растут.

Ответ: $a\ge 6$

10.10 $g(x)$ на $[0;4]$ симметрична относительно $x=2$; $g(0)=g(4)=2$, максимум $g(2)=2\sqrt{2}$. Возрастает на $[0;2]$, убывает на $[2;4]$.

Ответ: $a\in[2;\ 2\sqrt{2})$

Раздел 11. Показательные и логарифмические уравнения с параметром

11.1 Множество значений 2^x — $(0;+\infty)$.

Ответ: $a>0$

11.2 $a-2>0$.

Ответ: $a>2$

11.3 $10-a=2^3=8$.

Ответ: $a=2$

11.4 $x+a=2x\Rightarrow x=a$; ОДЗ: $2x>0$, то есть $a>0$ (тогда и $x+a=2a>0$).

Ответ: **при** $a>0$**:** $x=a$**; при** $a\le 0$ **корней нет**

11.5 $t^2 - 2t + a = 0$, два положительных корня: $D = 4 - 4a > 0$, $t_1 t_2 = a > 0$, $t_1 + t_2 = 2 > 0$.

Ответ: $a \in (0;\, 1)$

11.6 $(t-1)(t-a) = 0$: $t = 1 \Rightarrow x = 0$. Второй корень $t = a$ добавляется при $a > 0$, $a \neq 1$.

Ответ: $a \in (-\infty;\, 0] \cup \{1\}$

11.7 $x^2 - 4x + a > 0$ при всех x: $\dfrac{D}{4} = 4 - a < 0$.

Ответ: $a > 4$

11.8 $4^x - a = 2^x$ (тогда $4^x - a > 0$ автоматически). $t = 2^x$: $t^2 - t - a = 0$, два положительных корня: $D = 1 + 4a > 0$, $t_1 t_2 = -a > 0$.

Ответ: $a \in \left(-\dfrac{1}{4};\, 0\right)$

11.9 $t^2 - at + a + 3 = 0$, $t > 0$. $t = 1$ не корень. $a = \dfrac{t^2+3}{t-1}$; $s = t - 1 > -1$, $s \neq 0$: $a = s + \dfrac{4}{s} + 2$. При $s > 0$: $a \geq 6$. При $-1 < s < 0$ функция убывает от -3 до $-\infty$: $a < -3$.

Ответ: $a \in (-\infty;\, -3) \cup [6;\, +\infty)$

11.10 $\iff ax = (x+1)^2,\ x > -1,\ ax > 0$. $f(x) = x^2 + (2-a)x + 1$. При $a > 0$ нужны корни $x > 0$: $x_1 x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = a - 2 > 0$, $D = a(a-4) \geq 0$ — один корень только при $a = 4$. При $a < 0$ нужен корень на $(-1; 0)$: $f(-1) = a < 0$, $f(0) = 1 > 0$ — ровно один. При $a = 0$ логарифм не определён.

Ответ: $a \in (-\infty;\, 0) \cup \{4\}$

Раздел 12. Тригонометрические уравнения с параметром

12.1 $-1 \leq a - 1 \leq 1$.

Ответ: $a \in [0;\, 2]$

12.2 $-1 \leq 2a + 1 \leq 1$.

Ответ: $a \in [-1;\, 0]$

12.3 $g(t) = t^2 + t$ на $[-1; 1]$: минимум $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$, максимум $g(1) = 2$.

Ответ: $a \in \left[-\dfrac{1}{4};\, 2\right]$

12.4 $a = 2t - t^2$, на $[-1; 1]$ функция возрастает (вершина в $t = 1$): от -3 до 1.

Ответ: $a \in [-3;\, 1]$

12.5 На $[0; \pi]$ синус возрастает от 0 до 1 и убывает до 0. При $a = 0$ корни 0 и π; при $a = 1$ — один корень $\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $a \in [0;\, 1)$

12.6 При $a = 1$ — два корня (0 и 2π), при $|a| < 1$ — два, при $a = -1$ — один ($x = \pi$).

Ответ: $a = -1$

12.7 $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

Ответ: $a \in \left[\dfrac{1}{2};\, 1\right]$

12.8 Условие $2^2 \leq a^2 + 1$, то есть $a^2 \geq 3$.

Ответ: $a \in (-\infty;\, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};\, +\infty)$

12.9 $(\sin x - 1)(\sin x - a) = 0$. $\sin x = 1$ даёт один корень $\dfrac{\pi}{2}$. Нужно ещё два от $\sin x = a$: это $|a| < 1$.

Ответ: $a \in (-1;\, 1)$

12.10 $\cos x = 1$: $x = 0,\ 2\pi$. Нужен ровно один новый корень от $\sin x = a$: $a = \pm 1$ (корни $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$). При $a = 0$: $\sin x = 0$ даёт $0,\ \pi,\ 2\pi$ — вместе снова три. При $0 < |a| < 1$ — четыре.

Ответ: $a \in \{-1;\ 0;\ 1\}$

Раздел 13. Симметрия и единственность решения

13.1 $x = 0 \Rightarrow a = 0$. Проверка: $x^2(x^2+1) = 0 \Rightarrow x = 0$. Подходит.

Ответ: $a = 0$

13.2 $x = 0 \Rightarrow a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a = 0$ или $a = 4$. В обоих случаях $x^2 + 3|x| = 0$ — решение только $x = 0$.

Ответ: $a \in \{0;\ 4\}$

13.3 $x = 0 \Rightarrow a = 1$. Проверка: при $x \neq 0$: $2^{|x|} + |x| > 1$, значит, решение одно.

Ответ: $a = 1$

13.4 Замена $x \to 2 - x$ не меняет уравнение — симметрия относительно $x = 1$. $x = 1 \Rightarrow a = 2$. Проверка: $\left(\sqrt{x} + \sqrt{2-x}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{x(2-x)} \leq 4$, равенство только при $x = 1$.

Ответ: $a = 2$

13.5 Система симметрична по x. $x = 0$: $y = a$, $a^2 = 1$. $a = 1$: $y = x^2 + 1 \geq 1$, а на окружности $y \leq 1$ — только $(0;1)$. $a = -1$: $x^4 - x^2 = 0$ — три решения.

Ответ: $a = 1$

13.6 $x = 0$: $a^2 = 4$. $a = 2$: $y \geq 2$, на окружности $y \leq 2$ — одно решение $(0;2)$. $a = -2$: точки $(0;-2)$ и $(\pm 2;0)$ — три решения.

Ответ: $a = 2$

13.7 $x = 0$: $a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ или $a = -1$. $a = 2$: $x^2 + 2(1 - \cos x) = 0$ — сумма неотрицательных, только $x = 0$. $a = -1$: $x^2 = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$; так как $\left|\sin\frac{x}{2}\right| \leq \frac{|x|}{2}$, правая часть $\leq \frac{x^2}{2} < x^2$ при $x \neq 0$ — снова только $x = 0$.

Ответ: $a \in \{-1;\ 2\}$

Раздел 14. Системы с параметром: окружности, прямые, модули

14.1 Горизонтальная прямая и окружность радиуса 2.

Ответ: $|a| < 2$**: 2;** $|a| = 2$**: 1;** $|a| > 2$**: 0**

14.2 $y^2 = a^2 - 9 > 0$.

Ответ: $|a| > 3$

14.3 $d = \dfrac{|a|}{\sqrt{2}} = 3$.

Ответ: $a = \pm 3\sqrt{2}$

14.4 Пучок прямых через $(0;2)$. $d = \dfrac{2}{\sqrt{1+a^2}} < 1 \iff a^2 > 3$.

Ответ: $|a| > \sqrt{3}$

14.5 $d = |a|$; внешнее касание $|a| = 3$, внутреннее $|a| = 2 - 1 = 1$.

Ответ: $a \in \{-3;\ -1;\ 1;\ 3\}$

14.6 Прямая параллельна сторонам квадрата $y = x + 2$ и $y = x - 2$. При $|a| = 2$ она совпадает со стороной — бесконечно много решений.

Ответ: $|a| < 2$**: 2;** $|a| = 2$**: бесконечно много;** $|a| > 2$**: 0**

14.7 Центры $(0;0)$ и $(3;4)$, $d=5$. Внешнее касание: $|a|+1=5$; внутреннее: $|a|-1=5$.

Ответ: $a\in\{-6;\,-4;\,4;\,6\}$

14.8 Здесь $a=R^2$. Касание сторон: $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $a=\dfrac{1}{2}$; вершины: $R=1$, $a=1$. Восемь точек — строго между.

Ответ: $a\in\left(\dfrac{1}{2};\,1\right)$

14.9 «Галочка» с вершиной $(0;a)$. При $a=-2$ вершина на окружности, лучи проходят через $(\pm2;0)$ — 3 решения. Лучи касаются окружности при $\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}=2$, $a=-2\sqrt{2}$. Между $-2\sqrt{2}$ и -2 каждый луч пересекает окружность дважды.

Ответ: **(а)** $a=-2$; **(б)** $a\in(-2\sqrt{2};\,-2)$

Раздел 15. Задачи формата ЕГЭ (задание 19)

15.1 $t=2^x\in[1;4]$ при $x\in[0;2]$. $(t-2)(t-2a)=0$. $t=2$ ($x=1$) — корень всегда. Второй корень $t=2a$ не должен попадать в $[1;4]$ или должен совпасть с 2: $2a<1$, $2a>4$ или $a=1$.

Ответ: $a\in\left(-\infty;\,\dfrac{1}{2}\right)\cup\{1\}\cup(2;\,+\infty)$

15.2 $(x-a)(x+a-2)=0$: корни a и $2-a$. $a\in[0;3]$ при $0\le a\le3$; $2-a\in[0;3]$ при $-1\le a\le2$. Ровно один — на симметрической разности: $[-1;0)\cup(2;3]$, плюс $a=1$ (корни совпадают).

Ответ: $a\in[-1;\,0)\cup\{1\}\cup(2;\,3]$

15.3 ОДЗ $x>1$. Корни: $x=2$ (из $\ln(x-1)=0$), $x=4$, $x=a$ (если $a>1$). Ровно два: $a\le1$ ($x=a$ вне ОДЗ), $a=2$ или $a=4$ (совпадения).

Ответ: $a\in(-\infty;\,1]\cup\{2;\,4\}$

15.4 ОДЗ $x\ge a$. Кандидаты: $x=a$ (если $a\in[0;2\pi]$), $x=\dfrac{\pi}{3}$ и $x=\dfrac{5\pi}{3}$ (если $\ge a$). $a<0$: $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$. $0\le a<\dfrac{\pi}{3}$: три корня. $a=\dfrac{\pi}{3}$: $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$. $\dfrac{\pi}{3}<a<\dfrac{5\pi}{3}$: a, $\dfrac{5\pi}{3}$. $a\ge\dfrac{5\pi}{3}$: не больше одного.

Ответ: $a\in(-\infty;\,0)\cup\left[\dfrac{\pi}{3};\,\dfrac{5\pi}{3}\right)$

15.5 $g(x)=x^2-2x$ на $[-1;2]$ принимает значения $[-1;3]$. Нужно $-5\le g(x)+a\le5$ на всём отрезке: $-1+a\ge-5$ и $3+a\le5$.

Ответ: $a\in[-4;\,2]$

15.6 $u=\sqrt{x-a}\ge0$, $v=\sqrt{x+2a-1}\ge0$: $u+v=1$, $v^2-u^2=3a-1\Rightarrow v-u=3a-1$. Отсюда $v=\dfrac{3a}{2}$, $u=\dfrac{2-3a}{2}$; условия $u,v\ge0$ дают $0\le a\le\dfrac{2}{3}$, и по u однозначно восстанавливается $x=u^2+a$.

Ответ: $a\in\left[0;\,\dfrac{2}{3}\right]$

15.7 Подставим $x=|y|-a$: $2y^2-2a|y|+a^2-1=0$ — квадратное относительно $s=|y|\ge0$. Каждому $s>0$ отвечают два решения ($y=\pm s$), $s=0$ — одно. Четыре решения $\iff$ два различных положительных s: $D=4(2-a^2)>0$, $s_1+s_2=a>0$, $s_1s_2=\dfrac{a^2-1}{2}>0$, то есть $1<a<\sqrt{2}$.

Ответ: $a\in(1;\,\sqrt{2})$

15.8 Как в разобранном примере: $a=h(x)=\dfrac{3}{(x+2)|x-4|}$. На $[0;4)$ знаменатель $-x^2+2x+8$ максимален при $x=1$ (9): h убывает от $h(0)=\dfrac{3}{8}$ до $h(1)=\dfrac{1}{3}$, затем растёт к $+\infty$. На $(4;+\infty)$ — один корень при любом $a>0$.

Ответ: $a\in\left\{\dfrac{1}{3}\right\}\cup\left(\dfrac{3}{8};\,+\infty\right)$

15.9 Кандидаты (с ОДЗ $x > \frac{1}{4}$): $x = \frac{1}{2}$ — если под корнем при $x = \frac{1}{2}$ неотрицательно: $a^2 - 6a + \frac{11}{4} \le 0 \iff a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right]$; $x = a$ — если $a \in \left(\frac{1}{4}; 1\right]$; $x = 6 - a$ — если $a \in \left[5; \frac{23}{4}\right)$. Совпадения: $a = \frac{1}{2}$ ($x = a = \frac{1}{2}$) и $a = \frac{11}{2}$ ($6 - a = \frac{1}{2}$). Перебор промежутков даёт ответ.

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \cup (1; 5) \cup \left[\frac{11}{2}; \frac{23}{4}\right)$

15.10 Нужно $f(x) > 1$ при всех x. На $[1; 7]$ f — парабола ветвями вниз, минимум на концах: $f(1) = 2a > 1$, $f(7) = 14a > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$. Вне $[1; 7]$: $x^2 + (2a - 8)x + 6 > 0$. Вершина $x_0 = 4 - a$: при $\frac{1}{2} < a \le 3$ она в $[1; 7]$, и условие сводится к концам. При $a > 3$ вершина левее 1 — нужно $D = (2a - 8)^2 - 24 < 0 \iff |a - 4| < \sqrt{6}$. Итого $\frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}$.

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6}\right)$